This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

PERKINS
ORIENTAL BOOKS
809 FAIR OAKS
SOUTH PASADENA
CALIFORNIA

2.00
Mulin

UNIV. OF MICH.

Y
228

Digitized by Google

QA
106
.S68

Digitized by Google

Digitized by Google

Sokolov, N

Н. И. Соколовъ.

Систематическій курсъ ариѳметики.

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ

Краткаго сборника задачъ, сгруппированныхъ по типамъ.

Простыя и десятичныя дроби.

ПОПУЛЯРНОЕ РУКОВОДСТВО ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНАГО ИЗУЧЕНІЯ.

КНИЖНЫЙ МАГАЗИНЪ
И. Т. ЩЕЛОКОВА
ТЕЛЕФОНЪ № 878.
Харбинъ, Нов.-Гор., Новоторг. 193.
Отдѣленія: 1) Пристань, Китайская.
2) Нов.-Гор., прот. вокзала

Типографія Т-ва И. Д. Сытина, Пятницкая улица, свой домъ.

МОСКВА.—1908.

Digitized by Google

Digitized by Google

Russian
Periodicals
4-5-48
62468

4-6-48 ETK

I.

ДѢЛИМОСТЬ ЧИСЕЛЪ.

§ 1. Дѣлители и кратныя числа.

Кратное и дѣлитель. Если одно число дѣлится на другое безъ остатка, то въ этомъ случаѣ обыкновенно говорятъ, что первое число дѣлится на второе, а второе дѣлитъ первое; при чемъ первое число называется **кратнымъ** второго, а второе—точнымъ **дѣлителемъ** перваго. Такъ, 40 есть кратное 8-ми, а 8 есть точный дѣлитель 40-ка.

Какія числа называются простыми? Числа, которыя дѣлятся безъ остатка только на единицу и на самихъ себя, называются простыми или первоначальными; таковы, напр., числа: 7, 13, 17, 19, 23, 29 и т. д. Эти числа называются, главнымъ образомъ, простыми потому, что они не происходятъ отъ перемноженія другихъ чиселъ.

Какія числа называются составными? Числа, которыя дѣлятся безъ остатка не только на единицу и на самихъ себя, но еще и на другія числа, называются составными; таковыя числа составляются перемноженіемъ простыхъ чиселъ. Напр., 35 есть число составное, такъ какъ оно, кромѣ 1-цы и самого себя дѣлится безъ остатка и на 5 и на 7, а слѣд., и составлено перемноженіемъ этихъ простыхъ чиселъ.

Замѣтимъ, что числа, кратныя 2-хъ, называются **четными**, а числа, не дѣлящіяся на 2, называются **нечетными**; отсюда, 1-ца есть нечетное число, 2—четное, 3—опять нечетное, а 4 — четное и т. д.

Digitized by Google

Какое число называется общимъ кратнымъ? Общимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется число, которое дѣлится на всѣ данныя числа безъ остатка. Напр., число 96 есть общее кратное чиселъ 24 и 32; на эти числа 96 дѣлится безъ остатка.

Какое число называется общимъ дѣлителемъ? Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется число, на которое дѣлятся всѣ данныя числа безъ остатка. Такъ, напримѣръ, 4 есть общій дѣлитель чиселъ 8, 20 и 36; каждое изъ этихъ чиселъ дѣлится на 4 безъ остатка.

1-ца есть общій дѣлитель всѣхъ цѣлыхъ чиселъ.

Какія числа называются взаимно-простыми? Числа, не имѣющія, кромѣ 1-цы, другого общаго дѣлителя, называются по отношенію другъ къ другу взаимно-простыми или **взаимно-первыми;** таковы числа могутъ быть: или всѣ простыя, напримѣръ: 5, 7, 11; или всѣ составныя, напримѣръ: 4, 9, 25; или же нѣкоторыя изъ нихъ простыя, а нѣкоторыя составныя, напримѣръ: 8, 11, 5, 21.

Какія числа называются взаимно-составными? Числа, имѣющія, кромѣ 1-цы, другихъ общихъ дѣлителей, называются по отношенію другъ къ другу взаимно-составными или **взаимно-кратными.** Такъ, напримѣръ: 15, 21, 27 — числа взаимно-кратныя, такъ какъ они имѣютъ, кромѣ 1-цы, общимъ дѣлителемъ число 3.

---

§ 2. Общіе признаки дѣлимости.

Существуютъ признаки, по которымъ легко узнать заранѣе, не производя дѣленія на самомъ дѣлѣ, дѣлится ли данное число на другое безъ остатка, или нѣтъ. Разсужденія о признакахъ дѣлимости основаны на слѣдующихъ свойствахъ:

1.

Дѣлимость суммы при дѣлимости слагаемыхъ. Если каждое изъ данныхъ слагаемыхъ дѣлится безъ остатка на какое-либо число, то и сумма ихъ раз-

Digitized by Google

дѣлится безъ остатка на то же число. Въ самомъ дѣлѣ, если, напр., каждое изъ слагаемыхъ чиселъ: 21+36+57 дѣлится безъ остатка на 3, то это показываетъ, что каждое изъ нихъ состоитъ изъ однихъ троекъ. Отсюда кажется очевиднымъ, что, складывая 21, 36 и 57, мы въ то же время къ нѣсколькимъ тройкамъ перваго слагаемаго прибавляемъ нѣсколько троекъ второго слагаемаго и нѣсколько троекъ третьяго слагаемаго и такимъ образомъ получаемъ сумму $(21+36+57=114)$, также состоящую изъ однихъ троекъ, а слѣд., и дѣлящуюся на 3.

Слѣдствіе. **Дѣлимость произведенія. Если одно число дѣлится на какого-нибудь дѣлителя безъ остатка, то и всѣ произведенія этого числа на другія числа, т.-е. всѣ кратныя его также раздѣлятся на того же дѣлителя безъ остатка.** Это опредѣленіе основывается на томъ, что всякое произведеніе можно разсматривать, какъ сумму равныхъ слагаемыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, 10 дѣлится на 5, а $40=10\times4$; слѣд., и число 40, какъ состоящее изъ 4-хъ десятковъ, также раздѣлится на 5.

2.

Дѣлимость разности при дѣлимости уменьшаемаго и вычитаемаго. Если каждое изъ двухъ чиселъ дѣлится на одно и то же число, то и разность ихъ раздѣлится на то же число. Въ самомъ дѣлѣ, если, напримѣръ, каждое изъ чиселъ 45 и 27 дѣлится на 9, то это показываетъ, что каждое изъ нихъ состоитъ изъ однѣхъ девятокъ; отсюда очевидно, что, вычитая изъ 45 число 27, мы въ то же время отъ нѣсколькихъ девятокъ перваго числа отнимаемъ нѣсколько девятокъ второго числа и такимъ образомъ получаемъ разность $(45-27=18)$, также состоящую изъ однѣхъ девятокъ, а слѣд., и дѣлящуюся на 9.

Слѣдствіе. **Если сумма двухъ слагаемыхъ и одно изъ этихъ слагаемыхъ дѣлятся на какое-либо число, то и другое слагаемое также раздѣлится на это число.** Это опредѣленіе основывается на томъ, что одно изъ двухъ слагаемыхъ можно разсматривать какъ разность между суммою и другимъ слагаемымъ. Напримѣръ, 900 есть сумма двухъ слагаемыхъ 45 и 855; сумма 900 и слагаемое 45 дѣлятся на

Digitized by Google

9; слѣд., и другое слагаемое 855, какъ разность 900 и 45, также раздѣлится на 9.

Наоборотъ же, **если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится на какое-нибудь число, а другое не дѣлится, то и сумма ихъ не раздѣлится на это число.** Напримѣръ: 12 дѣлится на 3, а 16 на 3 не дѣлится; слѣд., и сумма этихъ чиселъ ($12 + 16 = 32$), какъ не составленная изъ однихъ троекъ, не раздѣлится на 3.

Слѣдствіе. **Если дѣлимое и дѣлитель дѣлятся на одно и то же число, то и остатокъ, полученный отъ ихъ дѣленія, также раздѣлится на это число.** (Это опредѣленіе основывается на томъ, что остатокъ можно разсматривать, какъ разность между дѣлимымъ и дѣлителемъ, умноженнымъ на частное). Для доказательства возьмемъ два числа 1170 и 325, дѣлящіяся безъ остатка на 13. Отъ дѣленія числа 1170 на 325 получимъ въ частномъ 3 и въ остаткѣ 195; слѣд., $1170 = 325.3 + 195$. Разсматривая 1170, какъ сумму двухъ слагаемыхъ $325.3 + 195$, мы безъ затрудненія найдемъ, что слагаемое 195 (или полученный отъ дѣленія остатокъ) должно раздѣлиться на 13, такъ какъ сумма 1170 и другое слагаемое 325.3 дѣлятся на 13.

---

§ 3. Признаки дѣлимости на 10, на 100, на 1000 и т. д.; на 5, на 2, на 4, на 8, на 9 и на 3.

Признакъ дѣлимости на 10, на 100, на 1000 и т. п. Такъ какъ всякое число единицъ, умноженное на 10, даетъ въ произведеніи число, оканчивающееся нулемъ, то отсюда слѣдуетъ, что на 10 дѣлятся безъ остатка только тѣ числа, которыя оканчиваются нулемъ. Дѣйствительно, напримѣръ, число 530, оканчивающееся нулемъ, представляетъ собою произведеніе, полученное отъ умноженія 53 на 10; слѣд., оно дѣлится (§ 2) на 10. Наоборотъ же, число, напримѣръ, 983 не можетъ дѣлиться на 10, такъ какъ если бы оно дѣлилось, то по умноженіи частнаго на 10 мы должны были бы получить въ произведеніи число, оканчивающееся

Digitized by Google

нулемъ, а не 3-мя. Точно такъ же нетрудно убѣдиться, что на 100 дѣлятся безъ остатка только тѣ числа, которыя оканчиваются двумя нулями, на 1000, — которыя оканчиваются 3-мя нулями, и т. п.

Признаки дѣлимости на 5. Такъ какъ на 5 дѣлится безъ остатка число 10, а изъ единицъ—только число 5, то отсюда слѣдуетъ, что на 5 дѣлятся только тѣ числа, которыя оканчиваются нулемъ или 5-ю. Докажемъ, что числа 730 и 385 раздѣлятся на 5, а число 456 не можетъ раздѣлиться.

1) Представивъ число 730 въ видѣ 73×10, найдемъ, что одинъ изъ сомножителей дѣлится на 5; слѣд., и все произведеніе, т.-е. число 730 (§ 2) должно раздѣлиться на 5.

2) Представивъ число 245 въ видѣ $240 + 5$, найдемъ, что первое слагаемое дѣлится на 5, такъ какъ оканчивается нулемъ, второе слагаемое также, очевидно, дѣлится на 5; слѣд., и сумма, т.-е. число 245 (§ 2) раздѣлится на 5.

3) Представивъ число 456 въ видѣ $450 + 6$, найдемъ, что первое слагаемое дѣлится на 5, такъ какъ оканчивается нулемъ; второе же слагаемое 6 не дѣлится на 5; а слѣд., и сумма (§ 2) не можетъ раздѣлиться на 5.

Признаки дѣлимости на 2. Такъ какъ на 2 дѣлится число 10, а изъ единицъ — только четныя цифры: 2, 4, 6, 8, то отсюда слѣдуетъ, что на 2 дѣлятся только тѣ числа, которыя оканчиваются нулемъ или какою-либо четною цифрою. Докажемъ, что числа 840 и 578 дѣлятся на 2, а 357 не можетъ раздѣлиться.

1) Представивъ число 840 въ видѣ 84×10, найдемъ, что одинъ изъ сомножителей дѣлится на 2; слѣд., и все произведеніе, т.-е. число 840, должно раздѣлиться на 2.

2) Представивъ число 578 въ видѣ $570 + 8$, найдемъ, что первое слагаемое, какъ оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 2, второе же слагаемое также, очевидно, дѣлится на 2; слѣд., и сумма, т.-е. число 578, раздѣлится на 2.

3) Представивъ число 357 въ видѣ $350 + 7$, найдемъ, что первое слагаемое, какъ оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 2, второе же слагаемое не дѣлится на 2; слѣд., и сумма, т.-е. число 357, не можетъ раздѣлиться на 2.

Digitized by Google

Признаки дѣлимости на 4. Такъ какъ на 4 дѣлится число 100, то отсюда слѣдуетъ, что на 4 дѣлятся только тѣ числа, которыя оканчиваются или двумя нулями, или же, по крайней мѣрѣ, у которыхъ двѣ послѣднія цифры (десятки и единицы вмѣстѣ) дѣлятся на 4. Объясняя по предыдущему, легко доказать, что числа 3700 и 2536 дѣлятся на 4, а 4376 не можетъ раздѣлиться.

1) $3700 = 37 \times 100$; сомножитель 100 дѣлится на 4; слѣд., 3700 раздѣлится на 4.

2) $2536 = 2500 + 36$; оба слагаемыя дѣлятся на 4; слѣд., 2536 раздѣлится на 4.

3) $4376 = 4300 + 76$; слагаемое 76 не дѣлится на 4; слѣд., 4376 не можетъ раздѣлиться на 4.

Признаки дѣлимости на 25. Такъ какъ на 25 дѣлится число 100, то отсюда слѣдуетъ, что на 25 дѣлятся только тѣ числа, которыя оканчиваются или двумя нулями, или у которыхъ, по крайней мѣрѣ, двѣ послѣднія цифры (десятки и единицы вмѣстѣ) дѣлятся на 25. Объясняя по предыдущему, легко доказать, что числа 1900 и 3875 дѣлятся на 25, а 2695 не можетъ раздѣлиться.

Признаки дѣлимости на 8. Такъ какъ на 8 дѣлится 1000, то отсюда слѣдуетъ, что на 8 дѣлятся только тѣ числа, которыя оканчиваются или тремя нулями, или у которыхъ, по крайней мѣрѣ, три послѣднія цифры (сотни, десятки и единицы вмѣстѣ) дѣлятся на 8. Объясняя по предыдущему, легко доказать, что числа 61000 и 9356 дѣлятся на 8, а 7126 не можетъ раздѣлиться.

1) $61000 = 61 \times 1000$; сомножитель 1000 дѣлится на 8; слѣд., 61000 раздѣлится на 8.

2) $9356 = 9000 + 356$; оба слагаемыя дѣлятся на 8; слѣд., 9356 раздѣлится на 8.

3) $7126 = 7000 + 126$; слагаемое 126 не дѣлится на 8; слѣд., 7126 не можетъ раздѣлиться на 8.

Признаки дѣлимости на 125. Такъ какъ на 125 дѣлится 1000, то отсюда слѣдуетъ, что на 125 дѣлятся только тѣ числа, которыя оканчиваются или тремя нулями, или у которыхъ, по крайней мѣрѣ, три послѣднія цифры (сотни, десятки и единицы вмѣстѣ) дѣлятся на 125. Объясняя по предыдущему, легко доказать, что

Digitized by Google

числа 37000 и 43875 дѣлятся на 125, а 9400 не можетъ раздѣлиться.

Признакъ дѣлимости на 9. Признакъ дѣлимости чиселъ на 9 основанъ на слѣдующемъ свойствѣ: **если какой-либо изъ разрядовъ даннаго числа, начиная съ десятковъ, уменьшимъ на столько простыхъ единицъ, сколько ихъ заключается въ цифрѣ, стоящей на мѣстѣ этого разряда, то получимъ разность, всегда дѣлящуюся на 9 безъ остатка.** Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ, напримѣръ, число 5873 и разобьемъ его по разрядамъ на слагаемыя: $5000+800+70+3$. Уменьшивъ первыя три слагаемыхъ соотвѣтственно на 5, 8 и 7, мы такимъ образомъ получимъ разности, дѣлящіяся на 9 безъ остатка. Въ самомъ дѣлѣ: $(5000-5):9=555$; $(800-8):9=88$; $(70-7):9=7$. Пользуясь указаннымъ свойствомъ, докажемъ, что число 6372 дѣлится на 9, а 4783 не можетъ раздѣлиться.

1) Разобьемъ число 6372 по разрядамъ на слагаемыя: $6000+300+70+2$ и измѣнимъ эти слагаемыя слѣдующимъ образомъ: первыя три слагаемыхъ 6000, 300 и 70 уменьшимъ соотвѣтственно на 6, на 3 и на 7, а послѣднее слагаемое 2 увеличимъ на эти же числа, т.-е. на 6, 3 и 7 (сумма отъ этого не измѣнится). Измѣнивъ такимъ образомъ, получимъ:

$$6372=(6000-6)+(300-3)+(70-7)+(2+6+3+7).$$

На основаніи вышеуказаннаго свойства мы заранѣе знаемъ, что первыя три слагаемыхъ дѣлятся на 9; остается, слѣд., испытать послѣднее слагаемое, отъ котораго по § 2 и зависитъ дѣлимость всего числа на 9. Но такъ какъ послѣднее слагаемое $(6+3+7+2)$ представляетъ собою сумму цифръ даннаго числа (6372), то, слѣд., все доказательство наше сводится къ тому, чтобы испытать, **дѣлится ли сумма цифръ даннаго числа на 9, или нѣтъ.** Если же дѣлится, то, значитъ, и число 6372 раздѣлится на 9; и, наоборотъ, если 6372 дѣлится на 9, то и сумма его цифръ должна дѣлиться на 9. Складывая на самомъ дѣлѣ $6+3+7+2$, получимъ въ суммѣ 18; что, очевидно, дѣлится на 9; слѣд., и данное число 6372 раздѣлится на 9.

2) Разсуждая по предыдущему, найдемъ, что число 4783 не можетъ раздѣлиться на 9, такъ какъ сумма цифръ $4+7+8+3=22$, но 22 не дѣлится на 9.

Digitized by Google

Признакъ дѣлимости на 3. Разлагая данное число подобно тому, какъ мы дѣлали при выводѣ признака дѣлимости на 9, найдемъ, что для дѣлимости даннаго числа на 3 необходимо, **чтобы сумма его цифръ дѣлилась на 3.** Такъ, напримѣръ: 1) число 4782 дѣлится на 3, потому что сумма его цифръ $(4+7+8+2=21)$ дѣлится на 3; 2) число 3563 не дѣлится на 3, потому что сумма его цифръ $(3+5+6+3=17)$ не дѣлится на 3.

---

§ 4. Дѣлимость чиселъ на составныхъ дѣлителей: 6, 12, 15, 18, 20, 36, 45 и т. п.

Признаки дѣлимости на означенныя числа основываются на слѣдующемъ опредѣленіи: **если данное число дѣлится одновременно на каждаго изъ взаимно-простыхъ дѣлителей, то оно дѣлится и на произведеніе ихъ.** Докажемъ, что число, напримѣръ, 276, дѣлящееся порознь на 3 и на 2, въ то же время должно раздѣлиться и на произведеніе этихъ простыхъ дѣлителей, т.-е. на 6.

Такъ какъ число 276 дѣлится на 3, то, слѣд., его можно представить въ видѣ суммы нѣсколькихъ равныхъ слагаемыхъ, т.-е.

$$276=3+3+3+3+\ldots\ldots+3+3.$$

Если же мы распредѣлимъ полученныя слагаемыя по группамъ, такъ чтобы въ каждой группѣ было по двѣ тройки, то найдемъ, что

$$276=(3+3)+(3+3)+(3+3)+\ldots\ldots+(3+3)$$
$$\text{или же}=6+6+6+\ldots.+6+6,$$

и при этомъ нужно замѣтить, что у насъ не останется ни одной отдѣльной тройки, такъ какъ тогда бы число 276, состоящее изъ нѣсколькихъ шестерокъ и одной тройки, не должно бы (§ 2) раздѣлиться на 2. Слѣдовательно, число 276 должно состоять изъ однѣхъ шестерокъ и поэтому должно раздѣлиться на 6.

Примѣчаніе. Если же дѣлители не взаимно-простые, а **взаимно-составные,** то данное число, хотя и будетъ дѣ-

Digitized by Google

литься на каждаго изъ нихъ порознь, **но на произведеніе ихъ можетъ и не дѣлиться**; такъ, напримѣръ, 108 дѣлится на 4 и на 6, но не дѣлится на 24; а 144, дѣлящееся на 4 и на 6, въ то же время дѣлится и на 24.

На основаніи вышеуказаннаго свойства можно вывести и слѣдующіе признаки дѣлимости:

1) Число, которое дѣлится на 3 и на 4, дѣлится и на произведеніе ихъ 12.

2) Число, которое дѣлится на 3 и на 5, дѣлится и на произведеніе ихъ 15.

3) Число, которое дѣлится на 2 и на 9, дѣлится и на произведеніе ихъ 18.

4) Число, которое дѣлится на 4 и на 5, дѣлится и на произведеніе ихъ 20.

5) Число, которое дѣлится на 4 и на 9, дѣлится и на произведеніе ихъ 36.

6) Число, которое дѣлится на 5 и на 9, дѣлится и на произведеніе ихъ 45.

---

§ 5. Разложеніе составныхъ чиселъ на ихъ простые множители.

Что значитъ разложить какое-нибудь составное число на простыхъ множителей? Разложить составное число на простыхъ множителей значитъ представить его подъ видомъ произведенія простыхъ чиселъ. Такъ, замѣняя число 30 произведеніемъ $2 \times 3 \times 5$, мы дѣлаемъ разложеніе на простые множители.

Какъ разлагаются составныя числа на простые множители? 1) Разложеніе на простые множители небольшихъ чиселъ—однозначныхъ или двузначныхъ—производится обыкновенно по таблицѣ умноженія. Такъ, напримѣръ, числа: 15, 42, 45, 72... легко разлагаются на множители въ умѣ, т.-е.:

$15 = 3 . 5$; $42 = 6 . 7$ или $= 2 . 3 . 7$; $45 = 5 . 9$ или $= 5 . 3 . 3$;
$72 = 8 . 9$ или $= 2 . 2 . 2 . 3 . 3$.

Digitized by Google

2) Если же данное составное число не находится въ таблицѣ умноженія, и вообще оно большое, то въ этомъ случаѣ употребляютъ иной способъ разложенія, общій для всѣхъ составныхъ чиселъ. Пусть, напримѣръ, дано разложить на простые множители число 252.

Пользуясь признаками дѣлимости, находимъ, что наименьшій простой множитель, на который дѣлится 252 (не считая 1), есть 2; дѣля 252 на 2, получимъ въ частномъ 126; слѣд., пишемъ, что $252 = 2 . 126$. Такъ какъ частное 126 есть также составное число, то будемъ продолжать разложеніе дальше. По признакамъ дѣлимости находимъ, что наименьшій простой множитель, на который дѣлится число 126, будетъ опять 2; дѣля 126 на 2, получимъ въ частномъ 63; слѣд., пишемъ, что $126 = 2 . 63$. Подставивъ $2 . 63$ на мѣсто 126 въ равенство $252 = 2 . 126$, получимъ: $252 = 2 . 2 . 63$. Продолжая по признакамъ дѣлимости разложеніе далѣе, найдемъ, что $63 = 3 . 21$; слѣд., $252 = 2 . 2 . 3 . 21$; наконецъ, $21 = 3 . 7$; слѣд., $252 = 2 . 2 . 3 . 3 . 7$. Полученные множители всѣ суть простыя числа.

Изъ приведеннаго примѣра выводимъ правило этого дѣйствія: **чтобы данное составное число разложить на простые множители, надо раздѣлить его на наименьшій дѣлитель, начиная съ 2, потомъ точно такъ же поступить съ полученнымъ частнымъ и т. д., послѣдовательно, до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится 1-ца.** Произведеніе всѣхъ найденныхъ дѣлителей и будетъ равно данному числу.

Самое дѣйствіе разложенія располагаютъ такъ: пишутъ данное составное число и справа отъ него проводятъ внизъ вертикальную черту; за чертою (въ строку съ числомъ) пишутъ первый его наименьшій дѣлитель, а подъ даннымъ числомъ пишутъ полученное частное. Далѣе подъ первымъ дѣлителемъ пишутъ наименьшаго дѣлителя частнаго, а подъ частнымъ пишутъ новое полученное частное и т. д. до тѣхъ поръ, пока въ послѣднемъ частномъ не будетъ написана 1-ца.

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Замѣчаніе. 1) Въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе разлагать составное число сначала **на составные множители.** Такъ, напр., 560 удобно сперва разложить на множители:

Digitized by Google

56 . 10, затѣмъ—7 . 8 . 10 и наконецъ—7 . 2 . 2 . 2 . 2 . 5; слѣд., 560 = 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 7 (отъ перестановки множителей произведеніе не измѣняется). Полученные множители всѣ суть простыя числа. Еще примѣръ:

$$810 = 81 . 10 = 9 . 9 . 10 = 3 . 3 . 3 . 3 . 2 . 5 \text{ или же}$$
$$810 = 2 . 3 . 3 . 3 . 3 . 5.$$

2) Полезно запомнить **случаи быстраго разложенія на множители чиселъ: 10, 100, 1000, 10000 и т. п.** Разложивъ означенныя числа на простые множители, получимъ: $10 = 2 . 5$; $100 = 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5$, $1000 = 10 . 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5$ и т. д. Замѣтимъ, что въ составъ числа, обозначеннаго 1-ю съ нѣсколькими нулями, простые множители 2 и 5 входятъ столько разъ, сколько нулей въ разлагаемомъ числѣ. Послѣ этого замѣчанія легко разложить на простые множители, напр., числа: 6300, 35000 и т. п. $6300 = 63 . 100 = 7 . 9 . 100 = 7 . 3 . 3 . 2 . 5 . 2 . 5$ или же $6300 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7$; $35000 = 35 . 1000$ и т. д.

---

§ 6. Нахожденіе всѣхъ дѣлителей (простыхъ и составныхъ) даннаго числа.

Какъ отыскать всѣхъ дѣлителей составного числа? Когда число разложено на простые множители, то очевидно, что **всякій изъ этихъ множителей есть въ то же время и дѣлитель даннаго числа;** отсюда, произведеніе, составленное изъ нѣсколькихъ простыхъ множителей даннаго числа, есть также дѣлитель этого числа. Въ самомъ дѣлѣ, разложивъ, напр., число 210 на простые множители и соединяя ихъ въ различныя группы, найдемъ слѣдующихъ дѣлителей:

$210 = (2 . 3 . 5) . 7$; слѣд., $210 : 7 = 2 . 3 . 5$;
$210 = (2 . 3) . (5 . 7)$; слѣд., $210 : (2 . 3) = 5 . 7$;
$210 = (2 . 5 . 7) . 3$; слѣд., $210 : (2 . 5 . 7) = 3$ и т. д.

На основаніи этого можно вывести слѣдующее правило: **чтобы найти всѣхъ дѣлителей составного числа, доста-**

Digitized by Google

точно разложить его на простые множители и взять ихъ сначала по одному, потомъ по 2, по 3, по 4 и т. д. до тѣхъ поръ, пока не переберемъ всѣхъ множителей даннаго числа.

Слѣдствіе. Чтобы найти частное отъ дѣленія даннаго числа на какого-нибудь его дѣлителя, достаточно изъ разложенія даннаго числа исключить тѣхъ множителей, которые входятъ въ составъ дѣлителя, а оставшіеся перемножить. Дано, напр., $210:(2.3)$. Такъ какъ $210=2.3.5.7$, то, чтобы получить искомое частное, достаточно въ разложеніи зачеркнуть множителей 2 и 3, т.-е. $210:(2.3)=$ $=5.7=35$.

Частное, полученное отъ дѣленія даннаго числа на одного изъ его дѣлителей, называется **дополнительнымъ множителемъ** или **дополнительнымъ дѣлителемъ.**

---

§ 7. Общій наибольшій дѣлитель.

Какое число называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ? Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется **самое большое число,** на которое дѣлятся безъ остатка всѣ данныя числа. Напр., общій наибольшій дѣлитель чиселъ 24, 36 и 60, есть 12, потому что 12 есть самое большое число, на которое дѣлятся всѣ эти числа безъ остатка.

Какъ отыскивается общій наибольшій дѣлитель? Для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя существуютъ два способа: 1) **способъ разложенія данныхъ чиселъ на простые множители** и 2) **способъ послѣдовательнаго дѣленія.**

1-й способъ.

Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя по первому способу, **надо сначала данныя числа разложить на простые множители, а потомъ выбрать изъ нихъ всѣхъ общихъ множителей и перемножить ихъ; произведеніе всѣхъ**

Digitized by Google

общихъ множителей и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

Пусть требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ 300 и 210.

Разложимъ для этого данныя числа на первоначальныхъ множителей: $300 = \mathbf{2}.2.\mathbf{3}.\mathbf{5}.5$; $210 = \mathbf{2}.\mathbf{3}.\mathbf{5}.7$.

Сравнивая множителей одного числа съ множителями другого, замѣчаемъ, что между ними есть такіе множители, на которые одновременно дѣлятся и число 300, и число 210; такъ, 2, 3 и 5 суть общіе множители и въ то же время общіе дѣлители данныхъ чиселъ. Найдя же простыхъ общихъ дѣлителей чиселъ 300 и 210, нетрудно найти и ихъ составныхъ общихъ дѣлителей; достаточно только перемножить ихъ простыхъ общихъ множителей по два и по три, т.-е. $(2.3) = 6$, $(2.5) = 10$, $(3.5) = 15$, $(2.3.5) = 30$. Произведенія, составленныя такимъ образомъ, и будутъ составными общими дѣлителями данныхъ чиселъ (§). **Самое же большое произведеніе, полученное отъ перемноженія всѣхъ простыхъ общихъ множителей, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ** чиселъ 300 и 210. Такъ, произведеніе $(2.3.5) = 30$, есть самое большое число, на которое одновременно могутъ дѣлиться числа 300 и 210.

Слѣдствіе. Изъ самаго способа нахожденія (образованія) общ. н. дѣлителя видно, что **частныя, полученныя отъ дѣленія данныхъ чиселъ на ихъ общ. н. дѣлителя,** суть числа **взаимно-простыя.** Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ числа 300 и 210 на ихъ общ. н. дѣлителя 30, мы получимъ въ частномъ числа 10 и 7, которыя уже не имѣютъ общихъ множителей, и, слѣд., взаимно-простыя.

2-й способъ.

Если надо отыскать общаго наибольшаго дѣлителя такихъ чиселъ, при разложеніи которыхъ нельзя воспользоваться признаками дѣлимости, то въ этомъ случаѣ удобнѣе находить искомаго дѣлителя **послѣдовательнымъ дѣленіемъ данныхъ чиселъ.** Этотъ способъ основанъ на слѣдующихъ двухъ свойствахъ:

1) **Если изъ двухъ данныхъ чиселъ большее число дѣлится на меньшее, то меньшее число въ этомъ случаѣ и**

Digitized by Google

будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ этихъ двухъ чиселъ.

Возьмемъ, напр., два числа 80 и 16, изъ которыхъ большее число дѣлится безъ остатка на меньшее. Такъ какъ данныя числа одновременно дѣлятся на 16, то отсюда слѣдуетъ, что число 16 есть общій дѣлитель 80 и 16. Этотъ общій дѣлитель въ то же время будетъ и наибольшій, такъ какъ меньшее число 16 не можетъ дѣлиться на число, большее самого себя.

2) Если изъ двухъ данныхъ чиселъ большее число не дѣлится на меньшее, то въ этомъ случаѣ ихъ общій наибольшій дѣлитель долженъ быть точно такой же, какъ у меньшаго числа и остатка большаго числа на меньшее.

Возьмемъ, напр., числа 180 и 75. Раздѣливъ большее число на меньшее, получимъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 30; слѣд., $180 = 75 . 2 + 30$ или же $180 = 75 + 75 + 30$. Докажемъ теперь, что общій наибольшій дѣлитель 180 и 75 точно такой же, какъ и для чиселъ 75 и 30. Разсматривая въ послѣднемъ равенствѣ число 180, какъ сумму въ видѣ трехъ слагаемыхъ 75, 75 и 30, находимъ, что общ. н. дѣлитель чиселъ 180 и 75 долженъ быть въ то же время и дѣлителемъ числа 30 (§), и, наоборотъ, общ. н. дѣлитель чиселъ 75 и 30 есть въ то же время дѣлитель и 180. Отсюда заключаемъ, что общ. н. дѣлитель данныхъ чиселъ точно такой же, какъ и общ. н. дѣлитель меньшаго числа и остатка отъ дѣленія большаго числа на меньшее.

Пользуясь указанными свойствами, найдемъ послѣдовательнымъ дѣленіемъ общ. н. дѣлителя чиселъ 391 и 253.

Прежде всего узнаемъ, не есть ли меньшее изъ данныхъ чиселъ общ. н. дѣлитель ихъ; для этого раздѣлимъ 391 на 253.

$$\begin{array}{r|l} 391 & 253 \\ \hline 253 & 1 \\ \hline 138 & \end{array}$$

Произведя дѣленіе, находимъ, что 253 не есть общ. н дѣлитель данныхъ чиселъ, такъ какъ отъ этого дѣленія получается остатокъ 138. Теперь, на основаніи 2-го свой-

Digitized by Google

ства, вмѣсто того, чтобы искать наибольшаго дѣлителя чиселъ 391 и 253, мы можемъ искать наибольшаго дѣлителя чиселъ 253 и 138. Общіе дѣлители этихъ паръ чиселъ должны быть одинаковы. Посмотримъ, не будетъ ли въ послѣдней парѣ чиселъ меньшее число 138 общ. н. дѣлителемъ; для чего дѣлимъ 253 на 138... Оказывается нѣтъ, такъ какъ отъ этого дѣленія получается остатокъ 115. Далѣе, на основаніи того же 2-го свойства опять разсуждаемъ, что общій н. дѣлитель 253 и 138 долженъ быть такой же, какой и для чиселъ 138 и 115; поэтому отыскиваемъ общ. н. дѣлителя этихъ чиселъ. Опять посмотримъ, не будетъ ли въ этой парѣ чиселъ меньшее число 115 общ. н. дѣлителемъ; для чего дѣлимъ 138 на 115... Оказывается нѣтъ, такъ какъ отъ этого дѣленія получается остатокъ 23. Наконецъ попрежнему разсуждаемъ, что общ. н. дѣлитель чиселъ 138 и 115 долженъ быть точно такой же, какой и для чиселъ 115 и 23. Отыскивая этого дѣлителя, дѣлимъ 115 на 23... Оказывается 115 дѣлится на 23 безъ остатка; слѣд., по первому свойству находимъ, что общій наибольшій дѣлитель этой пары чиселъ равняется 23. Но такъ какъ изъ предыдущихъ разсужденій видно, что общ. н. дѣлитель чиселъ 115 и 23 долженъ быть общ. н. дѣлителемъ и для чиселъ 138 и 115, а равно и для чиселъ 253 и 138 и, наконецъ, для чиселъ 391 и 253, то, слѣд., 23 и есть искомый общ. н. дѣлитель.

Самое дѣйствіе послѣдовательнаго дѣленія чиселъ располагается обыкновенно такъ:

	1	1	1	5	
—	391	253	138	115	23
	253	138	115	115	
	138	115	23	»	

Разсматривая произведенное вычисленіе, замѣчаемъ, что **послѣдовательное дѣленіе есть дѣленіе большаго числа на меньшее, меньшаго числа на полученный остатокъ, остатка на новый остатокъ и т. д.** до тѣхъ поръ, пока **не получится въ остаткѣ нуль.**

Digitized by Google

Располагается это дѣйствіе еще такъ:

$$\begin{array}{r|l} 391 & 253 \\ -253 & 1 \\ \hline 253 & 138 \\ -138 & 1 \\ \hline 138 & 115 \\ -115 & 1 \\ \hline 115 & 23 \\ -115 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Какъ отыскивается послѣдовательнымъ дѣленіемъ общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ? Чрезъ послѣдовательное дѣленіе нетрудно найти общ. н. дѣлителя и нѣсколькихъ чиселъ. Пусть даны, напр., числа 623, 890 и 9701. Отыскиваемъ сначала общ. н. дѣлителя только для двухъ первыхъ чиселъ... Произведя послѣдовательное дѣленіе, найдемъ, что ихъ общ. н. дѣлитель равняется 89. Далѣе, находимъ общ. н. дѣлителя чиселъ 9701 и 89; онъ будетъ равенъ 89. Это послѣднее число 89 и будетъ общ. н. дѣлителемъ данныхъ трехъ чиселъ.

Итакъ, **чтобы найти общ. н. дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ послѣдовательнымъ дѣленіемъ, надо сначала отыскать общ. н. дѣлителя для какихъ-нибудь двухъ изъ этихъ чиселъ; затѣмъ найти общ. н. дѣлителя для 3-го числа и полученнаго общ. н. дѣлителя первыхъ двухъ, потомъ для 4-го числа и полученнаго общ. н. дѣлителя первыхъ трехъ и т. д.; послѣдній дѣлитель и будетъ искомымъ общ. н. дѣлителемъ данныхъ чиселъ.**

§ 8. Общее наименьшее кратное.

Какое число называется общимъ наименьшимъ кратнымъ? Общимъ наименьшимъ кратнымъ нѣсколькихъ чиселъ называется **самое меньшее число**, которое дѣлится на всѣ данныя числа безъ остатка. Такъ, напр., наименьшее кратное чиселъ 5, 6 и 12 будетъ 60.

Digitized by Google

Какъ отыскивается общее наименьшее кратное? Для нахожденія общаго наименьшаго кратнаго существуютъ два способа: 1) **способъ разложенія данныхъ чиселъ на простые множители** и 2) **способъ послѣдовательнаго дѣленія данныхъ чиселъ.**

1-й способъ.

Пусть требуется найти общ. н. кратное чиселъ 75, 60 и 72.

Разложимъ для этого данныя числа на простые множители:

$$75 = 3 . 5 . 5.$$
$$60 = 2 . 2 . 3 . 5.$$
$$72 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3.$$

Такъ какъ искомое наименьшее число должно дѣлиться на 75, то, слѣд., оно должно содержать въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей этого числа, т.-е. 3 . 5 . 5 (§).

Далѣе, искомое наименьшее число должно въ то же время дѣлиться и на 60; слѣд., оно должно содержать въ себѣ, кромѣ множителей 3, 5 и 5, всѣхъ простыхъ множителей и этого числа, т.-е. множителей 2 . 2 . 3 . 5. Но такъ какъ два послѣднихъ множителя 3 и 5 уже входятъ въ составъ множителей числа 75, то поэтому достаточно приписать къ множителямъ 3 . 5 . 5 только два первыхъ множителя числа 60, т.-е. множителей 2 и 2. Составленное такимъ образомъ произведеніе: 3 . 5 . 5 . 2 . 2 должно дѣлиться и на 75 и на 60.

Наконецъ искомое наименьшее число должно дѣлиться и на 72; слѣд., оно должно содержать въ себѣ, кромѣ множителей 2 . 2 . 3 . 5 . 5, всѣхъ простыхъ множителей и этого числа, т.-е. множителей 2 . 2 . 2 . 3 . 3. Но такъ какъ три множителя 2, 2 и 3 числа 72 уже входятъ въ составъ множителей чиселъ 75 и 60, то поэтому достаточно приписать къ множителямъ 2 . 2 . 3 . 5 . 5 только остальные два множителя, т.-е. 2 и 3. Составленное такимъ образомъ произведеніе: 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5, равное 1800, и будетъ общимъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ чиселъ. Общимъ кратнымъ оно будетъ потому, что одновременно дѣлится на 75, 60 и 72; а наименьшимъ кратнымъ потому, что въ составъ его множителей 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5 вошли изъ разложеній данныхъ

Digitized by Google

чиселъ лишь тѣ множители, произведеніе которыхъ есть самое наименьшее число, одновременно дѣлящееся на 75, 60 и 72.

На основаніи предыдущаго разсужденія выводимъ слѣдующее правило:

Чтобы найти **общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ** по первому способу, **надо разложить данныя числа на простые множители, потомъ взять большее изъ данныхъ чиселъ какъ множителя и приписать къ нему всѣхъ тѣхъ множителей, которыхъ недостаетъ въ этомъ числѣ сравнительно съ прочими данными числами; произведеніе, составленное такимъ образомъ, и будетъ общимъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ чиселъ.**

Въ нахожденіи общаго наименьшаго кратнаго нужно замѣтить слѣдующія два простыхъ случая:

1. Если одно изъ данныхъ чиселъ дѣлится на остальныя, то оно и будетъ общ. н. кратнымъ данныхъ чиселъ. Напр., общее наименьшее кратное чиселъ 9, 21 и 63, есть, очевидно, 63.

2. Если данныя числа попарно взаимно-простыя, т.-е. не имѣютъ общихъ дѣлителей, то наименьшее кратное такихъ чиселъ равно ихъ произведенію. Напр., наименьшее кратное чиселъ 8, 9 и 25 равно $8 . 9 . 25 = 1800$.

Точно такъ же находятъ наименьшее кратное и простыхъ чиселъ; напр., наименьшее кратное чиселъ 2, 5 и 7 равно $2 . 5 . 7 = 70$.

2-й способъ.

Если нужно отыскать наименьшее кратное такихъ чиселъ, при разложеніи которыхъ нельзя воспользоваться признаками дѣлимости, то въ этомъ случаѣ удобнѣе находить наименьшее кратное чрезъ послѣдовательное дѣленіе.

Пусть требуется найти наименьшее кратное чиселъ 1271 и 899.

Сдѣлавъ съ этими числами послѣдовательное дѣленіе:

1271	899	372	155	62	31
899	746	310	124	62	
372	155	62	31	00	

Digitized by Google

найдемъ, что общ. н. дѣлитель равенъ 31. Раздѣлимъ теперь на общ. н. дѣлителя 31 меньшее изъ данныхъ чиселъ и полученное частное умножимъ на большее данное.

$$899 : 31 = 29; \quad 1271 \cdot 29 = 36859$$

Результатъ, полученный такимъ образомъ, и будетъ общимъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ чиселъ. Докажемъ, что это вѣрно. Дѣйствительно, чтобы составить наименьшее кратное чиселъ 1271 и 899, мы должны по предыдущему параграфу взять всѣхъ простыхъ множителей одного числа, напр., перваго, и изъ второго добавить къ нимъ только тѣхъ множителей, которыхъ недостаетъ въ 1271 сравнительно съ 899. На самомъ дѣлѣ мы то же и сдѣлали: взяли сразу само число 1271 и приписали къ нему, недостающаго до числа 899, множителя 29. Произведеніе, составленное такимъ образомъ и есть самое наименьшее число, одновременно дѣлящееся на 1271 и 899.

На основаніи такого разсужденія выводимъ слѣдующее правило: **чтобы найти наименьшее кратное двухъ чиселъ чрезъ послѣдовательное дѣленіе, надо меньшее изъ данныхъ чиселъ раздѣлить на ихъ общ. н. дѣлителя и полученное частное умножить на большее число.**

Какъ отыскивается послѣдовательнымъ дѣленіемъ общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ? Чрезъ послѣдовательное дѣленіе нетрудно найти наименьшее кратное и нѣсколькихъ чиселъ. Пусть даны, напр., числа 120, 168 и 180. Отыскиваемъ сначала наименьшее кратное только для двухъ простыхъ чиселъ. Поступая по предыдущему, найдемъ, что оно равняется 840. Далѣе, находимъ наименьшее кратное чиселъ 840 и 180; оно будетъ равно 2520. Это послѣднее число 2520 и будетъ общимъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ трехъ чиселъ (§).

Итакъ, **чтобы найти общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ чрезъ послѣдовательное дѣленіе, надо сначала отыскать наименьшее кратное для какихъ-нибудь двухъ изъ этихъ чиселъ, затѣмъ найти наименьшее кратное для 3-го числа и полученнаго кратнаго первыхъ двухъ и т. д. Послѣднее кратное и будетъ искомымъ наименьшимъ кратнымъ для данныхъ чиселъ.**

Digitized by Google

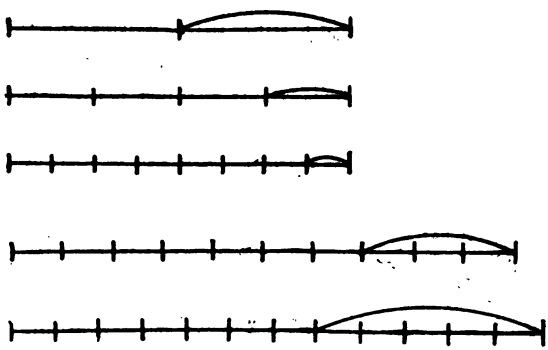
II.

ПРОСТЫЯ ИЛИ ОБЫКНОВЕННЫЯ ДРОБИ.

§ 9. Части или доли единицы.

Всякую величину (единицу) можно раздѣлить, хотя мысленно, на равныя части; каждая изъ полученныхъ частей будетъ называться долей этой величины (единицы). Доля единицы получаетъ свое названіе отъ числа частей, на которыя раздѣлена единица для полученія этой доли. Если, напр., какая-нибудь единица—аршинъ или фунтъ—раздѣлена на двѣ равныя части, то каждая доля такой единицы называется половиной (аршина или фунта), если—на три части, то каждая доля называется третью, на четыре части—четвертью, на 8 частей—восьмою, на 40 частей—сороковою, и т. д.

1. Считая всю черту за единицу, прочитать отмѣченныя доли единицы.



2. Раздѣлить 1 фунтъ на 2, 3, 4, 5, 8 равныхъ частей. Какъ называется каждая часть?

3. Если одно яблоко раздѣлить между двумя, четырьмя, восемью мальчиками, то сколько получитъ каждый?

4. Какъ получить шестую часть единицы?—10-ю?—18-ю?—25-ю?—64-ю?—105-ю? и т. д.

Изъ равныхъ долей раздѣленной единицы можно взять одну, двѣ, три, 5, 7 и вообще нѣсколько долей. Если, напр., прямую линію (см.) раздѣлить на 10 равныхъ долей

Digitized by Google

и взять отъ нея 3 такихъ доли, то взятая часть будетъ содержать въ себѣ 3 десятыхъ доли единицы, а оставшаяся—7 десятыхъ долей единицы.

Прочитать на 5-мъ рисункѣ отмѣченныя доли единицы.

Отмѣтить на третьемъ рисункѣ 3 восьмыхъ, 5 восьмыхъ долей единицы.

Отмѣтить на 4-мъ рисункѣ 4 десятыхъ, 9 десятыхъ долей единицы.

Отмѣтить на 5-мъ рисункѣ 7 двѣнадцатыхъ, 11 двѣнадцатыхъ долей единицы.

Какъ составить изъ единицы 3 четверти, 3 седьмыхъ, 9 двадцатыхъ, 15 тридцать вторыхъ, 53 сотыхъ и т. п.?

Какъ отъ аршина сукна отрѣзать часть въ 5 шестнадцатыхъ аршина?

Что называется дробью? Число, показывающее одну изъ равныхъ частей единицы (см. рис. 1-й, 2-й и 3-й) или же соединеніе нѣсколькихъ равныхъ частей единицы (см. рисунки 4-й и 5-й), называется **дробью.**

Изъ опредѣленія видно, что **дробь получается только въ томъ случаѣ, когда измѣряемая величина меньше цѣлой мѣры** (какой-либо взятой единицы), а потому и **измѣряется ея частями.** Напр., длину карандаша, которая короче аршина, можно измѣрить только частями аршина, а никакъ ни цѣлымъ аршиномъ.

Опредѣленіе величины дроби. Чтобы точно опредѣлить величину дроби, **необходимо знать, на сколько частей раздѣлена единица, и сколько такихъ частей взято отъ нея.** Если, напр., 1 аршинъ раздѣленъ на 16 равныхъ частей и такихъ частей взято 7, то говоримъ, что величина дроби равна 7-ми шестнадцатымъ долямъ аршина.

Какое число называется смѣшаннымъ? Число, содержащее въ себѣ цѣлыя единицы и дробь (т.-е. части единицы) называется **смѣшаннымъ числомъ.** Напр., 5 цѣлыхъ единицъ и 3 восьмыхъ доли единицы есть число смѣшанное; точно такое же и число 12 цѣлыхъ 7 пятнадцатыхъ.

Смѣшанное число получается въ томъ случаѣ, когда **при измѣреніи какой-либо величины цѣлой единицей, получается остатокъ, который меньше этой единицы.** Такъ,

Digitized by Google

напр., при измѣреніи длины комнаты аршиномъ оказалось, что по длинѣ ея уложилось 3 цѣлыхъ аршина и еще остатокъ, равный четверти аршина; въ этомъ случаѣ 3 съ четвертью аршина разсматриваютъ, какъ одно смѣшанное число.

Какъ изображается дробь? Дробь изображается двумя числами, которыя ставятся одно подъ другимъ и отдѣляются другъ отъ друга чертою. Напр., дробь 5 седьмыхъ изображается такъ: $\frac{5}{7}$ или $^5/_7$; дробь 7 двѣнадцатыхъ— $\frac{7}{12}$ или $^7/_{12}$.

Верхнее число дроби называется **числителемъ**, а нижнее (подъ чертою) **знаменателемъ.** Числитель показываетъ, сколько частей взято отъ единицы, а знаменатель показываетъ, на сколько частей раздѣлена единица. Числитель и знаменатель называются **членами дроби.**

Напишите цифрами слѣдующія дроби: 8 пятнадцатыхъ, 17 двадцать-пятыхъ, 29 сороковыхъ, 63 сотыхъ, 75 двѣсти-восемьдесятъ-первыхъ и т. д.

Замѣчаніе. **Происхожденіе дробей отъ дѣленія одного числа на другое.** Если цѣлое число не дѣлится безъ остатка на другое, то тогда частное обыкновенно изображаютъ дробью, при чемъ числителемъ пишутъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлителя. Напр.: $7:10=^7/_{10}$; $14:25=^{14}/_{25}$; $9:5=^9/_5$ и т. п.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что **всякую дробь можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія числителя на знаменателя.**

Смѣшанное число изображается такъ: сначала пишется цѣлое число, а потомъ къ нему съ правой стороны приписывается дробь. Напр., 5 цѣлыхъ и $^3/_7$ изображаются: $5\frac{3}{7}$ или $5^3/_7$. Такое обозначеніе замѣняетъ собою сумму цѣлаго числа съ дробью, т.-е. $5+^3/_7$. (Члены дроби въ смѣшанномъ числѣ пишутся обыкновенно болѣе мелкими цифрами, чѣмъ цѣлое число.)

Какія дроби называются правильными и какія неправильными? Дроби **по отношенію къ единицѣ** распредѣляются на правильныя и неправильныя.

Digitized by Google

Правильною дробью называется такая дробь, которая меньше единицы. Признакомъ правильной дроби служитъ то, что въ ней числитель меньше знаменателя. Напр., $^2/_3$, $^5/_8$, $^7/_{12}$, $^{13}/_{15}$...—дроби правильныя.

Неправильною дробью называются такая дробь, которая или больше единицы или, по крайней мѣрѣ, **равна единицѣ.** Признакомъ неправильной дроби служитъ то, что въ ней числитель или больше знаменателя или равенъ ему. Напр., $^5/_3$, $^7/_4$, $^{12}/_5$, $^6/_6$, $^9/_9$, $^{20}/_{20}$...—дроби неправильныя.

Назовите въ слѣдующихъ примѣрахъ, какія дроби правильныя и какія неправильныя: $^4/_5$, $^9/_8$, $^{12}/_5$, $^5/_6$, $^{10}/_{10}$, $^{15}/_{15}$, $^{18}/_{20}$, $^{18}/_{15}$, $^9/_7$, $^9/_{14}$, $^{25}/_{25}$, $^{25}/_{30}$.

Напишите нѣсколько дробей, меньшихъ единицы, бо́льшихъ единицы и равныхъ единицѣ.

Какъ можно обратить цѣлое число въ дробь? Ясно, что единицу можно выразить въ какихъ угодно доляхъ. Напр.: $1 = {}^3/_3 = {}^8/_8 = {}^{15}/_{15} = {}^{32}/_{32} = {}^{105}/_{105} = {}^{1256}/_{1256}$ и т. д.

Пусть требуется 5 единицъ выразить въ девятыхъ доляхъ. Такъ какъ въ одной единицѣ девятыхъ долей содержится 9, то въ 5-ти единицахъ ихъ будетъ 5 разъ по 9, т.-е. 45 девятыхъ долей; отсюда $5 = \frac{9 \cdot 5}{9} = \frac{45}{9}$.

Точно такъ же найдемъ, что $12 = \frac{5.12}{5} = \frac{60}{5} = \frac{84}{7} = \frac{36}{3} = \frac{1200}{100}$ и т. п.

Подобно этому иногда полезно бываетъ изобразить цѣлое число дробью, у которой числитель равенъ самому цѣлому числу, а знаменатель единицѣ. Напр.: $6 = {}^6/_1$; $9 = {}^9/_1$; $100 = \frac{100}{1}$ и т. п.

Какъ обратить смѣшанное число въ неправильную дробь? Обратить смѣшанное число, напр., $4^5/_7$, въ неправильную дробь—значитъ узнать, сколько седьмыхъ долей содержится въ 4-хъ цѣлыхъ единицахъ и $^5/_7$ доляхъ такой же единицы. Такъ какъ въ 4-хъ цѣлыхъ единицахъ седьмыхъ долей заключается 4 раза по 7, т.-е. 28, да еще въ $^5/_7$ единицы такихъ же долей — 5, то, слѣд., во всемъ смѣшанномъ числѣ седьмыхъ долей будетъ (28+5=) 33; отсюда, $4^5/_7 = \frac{(7.4)+5}{7} = {}^{33}/_7$.

Digitized by Google

Точно такъ же найдемъ, что $7^5/_6 = {}^{47}/_6$; $8^1/_3 = {}^{25}/_3$ и т. д.

Итакъ, **чтобы обратить смѣшанное число въ неправильную дробь, достаточно знаменателя дроби умножить на цѣлое число, къ произведенію прибавить числителя и подъ полученной суммой подписать того же знаменателя.**

Замѣнить неправильными дробями слѣдующія смѣшанныя числа: $7^4/_5$, $12^2/_3$, $15^7/_9$, $5^9/_{16}$, $3^{15}/_{32}$ и т. д.

Какъ исключить цѣлое число изъ неправильной дроби? Такъ какъ неправильная дробь равна или больше единицы, то, слѣд., ее можно обратить или въ цѣлое число или же въ смѣшанное, т.-е. въ цѣлое съ правильной дробью. Такое обращеніе называется исключеніемъ цѣлаго числа изъ неправильной дроби. Пусть, напр., дано изъ ${}^{30}/_7$ исключить цѣлое число. Такъ какъ ${}^7/_7$ составляютъ единицу, то, слѣд., ${}^{30}/_7$ составятъ столько цѣлыхъ единицъ, сколько разъ въ 30-ти содержится число 7. Раздѣливъ 30 на 7, получимъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 2. Такимъ образомъ, очевидно, что въ ${}^{30}/_7$ цѣлыхъ единицъ содержится 4 и, кромѣ этого, еще ${}^2/_7$ части единицы; слѣд., искомое число равно $4^2/_7$.

Точно такъ же найдемъ, что ${}^{25}/_4 = 6^1/_4$; ${}^{27}/_9 = 3$; ${}^{67}/_9 = 7^4/_9$ и т. д.

Итакъ, **чтобы исключить изъ неправильной дроби цѣлое число, достаточно только числителя дроби раздѣлить на знаменателя; полученному частному, если нѣтъ остатка, и будетъ равна данная дробь; иначе же—къ цѣлому частному нужно приписать правильную дробь, составленную изъ остатка, дѣленнаго на знаменателя.**

Найти полныя частныя отъ дѣленія 25 на 7, 31 на 9, 63 на 8, 10 на 19 и т. д.

Какъ узнать, какая изъ двухъ или нѣсколькихъ дробей больше, и какая меньше? Такъ какъ дробь есть одна или нѣсколько равныхъ частей единицы, то изъ этого слѣдуетъ, что **дробь тѣмъ больше, чѣмъ больше взято частей единицы;** такъ, дробь ${}^2/_7$ больше ${}^1/_7$, дробь ${}^5/_7$ больше ${}^4/_7$, дробь ${}^3/_7$ меньше ${}^6/_7$ и т. д.; эти дроби можно расположить въ порядкѣ ихъ величины такъ: ${}^1/_7$, ${}^2/_7$, ${}^3/_7$, ${}^4/_7$, ${}^5/_7$ и т. д.

Digitized by Google

Наоборотъ, чѣмъ на бо́льшее число частей раздѣлена единица, тѣмъ дробь меньше; такъ дробь $^1/_4$ меньше $^1/_3$, $^1/_5$ меньше $^1/_4$, $^1/_5$ больше $^1/_6$ и т. д.; эти дроби располагаются въ порядкѣ ихъ величины такъ: $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$ и т. д.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ: 1) **изъ данныхъ дробей съ одинаковыми знаменателями та больше, числитель которой больше; 2) изъ данныхъ дробей съ одинаковыми числителями та больше, знаменатель которой меньше.**

Расположить дроби въ порядкѣ ихъ величины:

1) съ одинаковыми знаменателями: $^4/_{17}$, $^9/_{17}$, $^{12}/_{17}$, $^2/_{17}$, $^{11}/_{17}$, $^{16}/_{17}$, $^7/_{17}$?

2) съ одинаковыми числителями: $^5/_9$, $^5/_{13}$, $^5/_7$, $^5/_{16}$, $^5/_{11}$, $^5/_6$, $^5/_{19}$, $^5/_{14}$?

Что меньше: $^3/_4$ фунта или $^3/_5$ фунта? $^7/_{25}$ рубля или $^9/_{25}$ руб.? $^9/_{16}$ аршина или $^9/_{13}$ арш.? $^{39}/_{50}$ версты или $^{39}/_{40}$ вер.?

Торговецъ купилъ два куска сукна различнаго достоинства; за одинъ кусокъ онъ заплатилъ $^9/_{20}$, а за другой—$^9/_{25}$ всѣхъ своихъ денегъ. Который изъ кусковъ дороже?

Одинъ поѣздъ проходитъ въ часъ $^{17}/_{32}$ всего разстоянія между двумя городами, а другой—$^{19}/_{32}$ того же разстоянія. Который поѣздъ движется быстрѣе?

Если же числители и знаменатели данныхъ дробей различны, то для опредѣленія, какая изъ дробей больше или меньше, можно ихъ сравнить съ единицей или съ какой-либо долей единицы. Такъ, напр., сравнивая величины дробей $^4/_5$, $^5/_6$ съ 1-ю, найдемъ, что въ первой дроби до единицы недостаетъ $^1/_5$ доли, а во второй—$^1/_6$ доли; но такъ какъ шестыя доли мельче пятыхъ, то, слѣд., вторая дробь $^5/_6$ больше первой $^4/_5$.

Дробь $^6/_7$ больше $^5/_9$, такъ какъ $^6/_7$, очевидно, болѣе $^5/_7$, а слѣд., и болѣе $^5/_9$.

Дробь $^3/_{10}$ меньше $^4/_9$, такъ какъ $^3/_{10}$, очевидно, меньше $^4/_{10}$, а слѣд., и меньше $^4/_9$.

Замѣчаніе. Въ затруднительныхъ случаяхъ при сравненіи величины дробей пользуются способомъ приведенія ихъ или къ одному и тому же знаменателю или къ одному и тому же числителю. (О чемъ см. § 12).

Digitized by Google

§ 10. Зависимость величины дробей отъ измѣненія ея членовъ.

Что сдѣлается съ дробью, если числителя ея или знаменателя увеличимъ или уменьшимъ на нѣсколько единицъ? Изъ предыдущихъ разсужденій, очевидно: 1) если **числителя дроби увеличить** на одну или нѣсколько единицъ, то и **дробь увеличится.**

Напр.: $^4/_7$ меньше $\frac{4+1}{7}$; $\frac{8}{15}$ меньше $\frac{8+3}{15}$.

2) Если **числителя дроби уменьшить** на одну или нѣсколько единицъ, то и **дробь уменьшится.**

Напр.: $^5/_9$ больше $\frac{5-1}{9}$; $\frac{7}{10}$ больше $\frac{7-4}{10}$.

3) Если **знаменателя дроби увеличить** на одну или нѣсколько единицъ, то **дробь уменьшится.**

Напр.: $^5/_{12}$ больше $\frac{5}{12+1}$; $\frac{9}{20}$ больше $\frac{9}{20+5}$.

4) Если **знаменателя дроби уменьшить** на одну или нѣсколько единицъ, то **дробь увеличится.**

Напр.: $^7/_{13}$ меньше $\frac{7}{13-1}$; $\frac{16}{25}$ меньше $\frac{16}{25-4}$.

5) Если **къ числителю и знаменателю** дроби **одновременно прибавить поровну,** то **правильная** дробь **увеличится,** а **неправильная уменьшится.**

Напр.: $^5/_6$ меньше $\frac{5+1}{6+1}$, т.-е. $^6/_7$, такъ какъ послѣдняя дробь $^6/_7$ ближе подходитъ къ 1-цѣ.

Напр.: $^8/_7$ больше $\frac{8+1}{7+1}$, т.-е. $^9/_8$, такъ какъ послѣдняя дробь $^9/_8$ ближе подходитъ къ 1-цѣ.

6) Если **отъ числителя и знаменателя** дроби **одновременно отнять поровну,** то **правильная** дробь **уменьшится,** а **неправильная увеличится.**

Digitized by Google

Напр.: $^5/_6$ больше $\frac{5-1}{6-1}$, т.-е. $^4/_5$, а $^6/_5$ меньше $\frac{6-1}{5-1}$, т.-е. $^5/_4$.

Какъ увеличить дробь въ нѣсколько разъ?

Чтобы увеличить дробь въ нѣсколько разъ, надо, не измѣняя знаменателя, во столько же разъ увеличить ея числителя, или же, не измѣняя числителя, во столько же разъ уменьшить ея знаменателя.

1-й способъ.

Если числителя дроби $^2/_9$ увеличимъ втрое, то получимъ дробь $^6/_9$. Сравнивая эти дроби между собою, найдемъ, что полученная дробь въ три раза больше данной, такъ какъ въ полученной дроби девятыхъ долей заключается 6, а въ данной таковыхъ же долей только 2.

2-й способъ.

Если знаменателя дроби $^2/_9$ уменьшимъ втрое, то получимъ дробь $^2/_3$. Ясно, что полученная дробь въ три раза больше данной, такъ какъ въ полученной дроби хотя число долей и не измѣнилось, но зато самыя доли, т.-е. величина ихъ сдѣлалась въ три раза крупнѣе, чѣмъ въ данной.

Какъ уменьшить дробь въ нѣсколько разъ?

Чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, надо, не измѣняя знаменателя, во столько же разъ уменьшить ея числителя, или же, не измѣняя числителя, во столько же разъ увеличить ея знаменателя.

1-й способъ.

Если числителя дроби $^8/_{15}$ уменьшимъ въ 4 раза, то получимъ дробь $^2/_{15}$. Сравнивая эти дроби между собою, найдемъ, что полученная дробь вчетверо меньше данной, такъ какъ въ полученной дроби пятнадцатыхъ долей только 2, тогда какъ въ данной таковыхъ же долей 8.

2-й способъ.

Если знаменателя дроби $^3/_5$ увеличить въ четыре раза, то получимъ дробь $^3/_{20}$. Ясно, что полученная дробь вчетверо меньше данной, такъ какъ въ полученной дроби, хотя число

Digitized by Google

долей и не измѣнилось, но зато самыя доли, т.-е. величина ихъ стала вчетверо мельче, чѣмъ въ данной.

Замѣчаніе. Нужно замѣтить, что при второмъ способѣ увеличенія дроби въ нѣсколько разъ получается болѣе простой отвѣтъ, чѣмъ при первомъ: дробь $^2/_3$, полученная чрезъ дѣленіе знаменателя данной дроби, гораздо проще по виду, чѣмъ дробь $^6/_9$, полученная чрезъ умноженіе числителя; поэтому въ подобныхъ случаяхъ, если возможно, всегда нужно примѣнять способъ дѣленія знаменателя дроби на данное число.

Увеличить каждую изъ дробей: $^3/_{10}$, $^8/_{15}$, $^9/_{25}$, $^{13}/_{45}$ въ 5 разъ двумя способами.

Умножить каждую изъ дробей: $^2/_7$, $^5/_{12}$, $^7/_{10}$, $^4/_{27}$, $^8/_{15}$ на 3.

Превратить смѣшанное число $2^3/_{10}$ въ неправильную дробь и умножить на 5.

Замѣчаніе. Нужно замѣтить, что при первомъ способѣ уменьшенія дроби въ нѣсколько разъ получается болѣе простой отвѣтъ, чѣмъ при второмъ; поэтому въ подобныхъ случаяхъ, если возможно, всегда надо примѣнять способъ дѣленія числителя дроби на данное число.

Уменьшить каждую изъ дробей: $^4/_7$, $^8/_{11}$, $^{12}/_{15}$, $^{24}/_{39}$ въ 2 раза двумя способами.

Раздѣлить каждую изъ дробей: $^3/_5$, $^{12}/_{17}$, $^7/_8$, $^{36}/_{25}$, $^{13}/_{20}$ на 4.

Превратить смѣшанное число $4^1/_2$ въ неправильную дробь и раздѣлить на 3.

Разсматривая самую дробь какъ частное, числителя ея какъ дѣлимое и знаменателя какъ дѣлителя, нетрудно замѣтить, что **вообще измѣненіе дроби вполнѣ сходно съ измѣненіемъ частнаго.** (Цѣлыя числа).

Какъ измѣнить видъ дроби, не измѣняя ея величины? 1) Если числителя и знаменателя дроби **уменьшить въ одинаковое число разъ,** то измѣнится только видъ дроби, величина ея останется безъ перемѣны. Возьмемъ дробь $^{12}/_{16}$ и раздѣлимъ ея числителя и знаменателя на 4. Произведя дѣленіе $\left(\frac{12:4}{16:4}\right)$, получимъ новую дробь $^3/_4$. Сравнивая полученную дробь съ данной, нетрудно замѣтить, что обѣ эти дроби различаются между собою только по виду, по величинѣ же онѣ совершенно одинаковы. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы раздѣлили на 4 числителя данной

Digitized by Google

дроби, то дробь въ 4 раза уменьшилась; когда же мы затѣмъ раздѣлили на 4 знаменателя ея, то дробь снова увеличилась въ 4 раза, т.-е. привелась къ прежней величинѣ; слѣд.,

$$^{12}/_{16} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = {}^{3}/_{4}.$$

2) Если числителя и знаменателя дроби **увеличить въ одинаковое число разъ,** то **измѣнится** только видъ дроби, величина же останется безъ перемѣны.

Возьмемъ дробь $^{3}/_{8}$ и помножимъ ея числителя и знаменателя на 5. Произведя умноженіе $\left(\frac{3 . 5}{8 . 5}\right)$, получимъ новую $^{15}/_{40}$. Сравнивая полученную дробь съ данной, замѣчаемъ, что эти дроби различаются между собою, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, только по виду, но не по величинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы умножили на 5 числителя данной дроби, то дробь увеличилась въ 5 разъ; когда же мы затѣмъ умножили на 5 знаменателя ея, то дробь снова уменьшилась въ 5 разъ, т.-е. привелась къ прежней величинѣ; слѣд.,

$$^{3}/_{8} = \left(\frac{3 . 5}{8 . 5}\right) = {}^{15}/_{40}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что **величина дроби не измѣнится, если ея числителя и знаменателя умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число.**

Это свойство дробей весьма важно въ томъ отношеніи, что даетъ возможность выражать одну и ту же дробь въ бо̀льшихъ или меньшихъ доляхъ единицы; такъ, напр.:

1) $^{12}/_{20} = {}^{6}/_{10} = {}^{3}/_{5}$.

2) $^{12}/_{20} = {}^{24}/_{40} = {}^{48}/_{80} = {}^{36}/_{60} = {}^{60}/_{100}$. и т. д.

Выразить дробь $^{3}/_{5}$, не измѣняя величины въ 10-хъ, 15-хъ, 25-хъ, 45-хъ доляхъ?

Выразить дробь $^{24}/_{36}$, въ 12-хъ, 9-хъ, 6-хъ, 4-хъ, 3-хъ доляхъ?

Выразить дроби $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{15}$ въ 90-хъ доляхъ?

Дробь $^{6}/_{24}$, не измѣняя величины, написать въ различныхъ видахъ?

Написать нѣсколько дробей, различныхъ по виду, но равныхъ по величинѣ.

Digitized by Google

§ 11. Сокращеніе дробей.

Что значитъ сократить дроби? Сократить дробь на какое-либо число—значитъ найти чрезъ дѣленіе числителя и знаменателя ея на это число болѣе простую по виду, но равную ей дробь. Дробь считается тѣмъ проще и яснѣе, чѣмъ числитель и знаменатель ея меньше. Такъ, дробь $^{14}/_{35}$, имѣя общимъ дѣлителемъ для обоихъ членовъ число 7, послѣ раздѣленія числителя и знаменателя ея на 7 $\left(\frac{14 : 7}{35 : 7}\right)$ сокращается въ дробь $^{2}/_{5}$.

Эта дробь и проста по виду и равна данной по величинѣ.

Сокращать можно только такую дробь, у которой числитель и знаменатель имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя, большаго 1-цы.

Дробь, у которой числитель и знаменатель не дѣлятся безъ остатка на одно и то же число, называется **несократимой**, какъ, напр., полученная дробь $^{2}/_{5}$.

Сокращеніе дробей по признакамъ дѣлимости. Обыкновенно сокращаютъ дробь, дѣля постепенно числителя и знаменателя ея на ихъ общихъ дѣлителей, начиная съ меньшаго, т.-е. съ 2-хъ или съ 3-хъ, съ 5-ти и т. д.; такъ, напр., $^{84}/_{126} \overset{2}{=} {}^{42}/_{63} \overset{3}{=} {}^{14}/_{21} \overset{7}{=} {}^{2}/_{3}$.

Впрочемъ, всегда соблюдать эту постепенность нѣтъ никакой надобности.

Если числитель и знаменатель дроби дѣлятся на 2, то должно посмотрѣть (см. признаки дѣлимости), не дѣлятся ли они на 4 или, еще лучше, на 8; если же есть возможность сократить на 3, то слѣдуетъ посмотрѣть, нельзя ли сократить на 9; кромѣ того, если числитель и знаменатель оканчиваются нулями, то прежде всего должно ихъ поровну зачеркнуть, т.-е. сократить дробь на 10, на 100 и т. д.

Пусть, напр., дано сократить дробь $\frac{7540}{12960}$.

Digitized by Google

На основаніи предыдущихъ разсужденій сначала зачеркиваемъ въ числителѣ и знаменателѣ по нулю, т.-е. сокращаемъ дробь на 10, получимъ $\frac{756}{1296}$; затѣмъ по признакамъ дѣлимости узнаемъ, что числитель и знаменатель полученной дроби дѣлятся на 2 и даже на 4; поэтому сокращаемъ $\frac{756}{1296}$ сразу на 4, получимъ $\frac{189}{324}$; далѣе по суммѣ цифръ чиселъ 189 и 324 узнаемъ, что числитель и знаменатель дроби $\frac{189}{324}$ дѣлятся не только на 3, но и на 9; поэтому и сокращаемъ на 9, получимъ $\frac{21}{36}$; наконецъ, видимъ, что полученная дробь еще сокращается на 3, будетъ $^7/_{12}$. Эта послѣдняя дробь уже несократима.

Самое дѣйствіе сокращенія дроби располагается такъ:

$$\frac{7560}{12960} \overset{10}{=} \frac{756}{1296} \overset{4}{=} \frac{189}{324} \overset{9}{=} \frac{21}{36} \overset{3}{=} \frac{7}{12};$$

Когда сокращаются дроби посредствомъ общаго наибольшаго дѣлителя? Пусть, напр., дано сократить дробь $\frac{207}{368}$. Разсматривая эту дробь, нетрудно замѣтить, что числитель ея не дѣлится ни на 2, ни на 3, ни на 5, а слѣд., и на тѣ числа, для которыхъ выведены признаки дѣлимости; поэтому тотъ способъ, которымъ мы сейчасъ сокращали дроби, здѣсь примѣнить нельзя. Въ подобныхъ случаяхъ для числителя и знаменателя данной дроби надо послѣдовательнымъ дѣленіемъ найти ихъ общаго наибольшаго дѣлителя и на него сократить дробь. Такимъ образомъ сдѣлавъ послѣдовательное дѣленіе (§), найдемъ, что общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя дроби $\frac{207}{368}$ равняется 23; раздѣливъ на это число оба члена данной дроби, получимъ частныя 9 и 16; слѣд., $\frac{207}{368} \overset{23}{=} {}^9/_{16}$.

Digitized by Google

Нужно замѣтить, что при этомъ способѣ сокращенія всегда получается дробь несократимая, какъ и въ данномъ случаѣ $^{9}/_{16}$.

Замѣчаніе. При сокращеніи весьма полезно замѣтить такія дроби, числитель и знаменатель которыхъ имѣютъ видъ произведеній; напр.: $\frac{9 \cdot 32}{16 \cdot 45}$. Въ подобной дроби сокращаютъ обыкновенно какого-нибудь изъ множителей числителя съ любымъ изъ множителей знаменателя; такъ:

$$\frac{27 \cdot 56}{35 \cdot 63} \overset{9}{=} \frac{3 \cdot 56}{35 \cdot 7} \overset{7}{=} \frac{3 \cdot 8}{35 \cdot 1} = \frac{24}{35}.$$

---

§ 12. Приведеніе дробей къ общему знаменателю.

Что значитъ привести дроби къ общему знаменателю? Привести дроби къ общему знаменателю— значитъ замѣнить ихъ такими равными имъ дробями, которыя имѣли бы одинаковаго знаменателя. Такое преобразованіе основано на томъ, что можно числителя и знаменателя дроби умножить на одно и то же число, не измѣняя ея величины.

Пусть, напр., дано привести къ общему знаменателю дроби

$$^{3}/_{8} \text{ и } ^{5}/_{6}.$$

1) Если числителя и знаменателя первой дроби умножимъ на 3 $\left(\frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3}\right)$, а числителя и знаменателя второй умножимъ на 4 $\left(\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}\right)$, то получимъ дроби $^{9}/_{24}$ и $^{20}/_{24}$, которыя равны даннымъ по величинѣ и имѣютъ одинаковаго знаменателя 24.

2) Если же числителя и знаменателя первой дроби умножимъ на знаменателя второй дроби $\left(\frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6}\right)$, а числителя и знаменателя второй дроби на знаменателя первой $\left(\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8}\right)$,

Digitized by Google

то получимъ дроби $^{18}/_{48}$ и $^{40}/_{48}$, которыя также равны даннымъ по величинѣ и имѣютъ общаго знаменателя 48.

Сравнивая дроби $^{9}/_{24}$ и $^{20}/_{24}$ съ дробями $^{18}/_{48}$ и $^{40}/_{48}$, нетрудно затѣтить, что дроби, полученныя въ первомъ случаѣ, гораздо проще, чѣмъ дроби, полученныя во второмъ случаѣ. Отсюда заключаемъ, что **приводить дроби надо всегда къ наименьшему общему знаменателю.**

Замѣчаніе. Для приведенія къ общему знаменателю обыкновенно даются дроби несократимыя; въ противномъ же случаѣ передъ приведеніемъ къ общему знаменателю слѣдуетъ всегда дроби сокращать.

Какъ приводятся къ общему наименьшему знаменателю дроби, знаменатели которыхъ суть числа взаимно-составныя? Пусть, напр., дано привести къ наименьшему общему знаменателю дроби

$$^{5}/_{12},\ ^{8}/_{15}\ \text{и}\ ^{3}/_{4}.$$

Такъ какъ $^{5}/_{12}$, $^{8}/_{15}$ и $^{3}/_{4}$ есть дроби несократимыя, то поэтому знаменатель всякой дроби, равной $^{5}/_{12}$, долженъ быть кратнымъ 12; знаменатель всякой дроби, равной $^{8}/_{15}$, долженъ быть кратнымъ 15 и знаменатель всякой дроби, равной $^{3}/_{4}$ долженъ быть кратнымъ 4; отсюда заключаемъ, что всякій общій знаменатель данныхъ дробей будетъ общимъ кратнымъ ихъ знаменателей 15, 12 и 4, а наименьшій общій знаменатель будетъ наименьшимъ кратнымъ этихъ чиселъ.

Составляя наименьшее кратное чиселъ 12, 15 и 4 по §, найдемъ, что оно равно 60; слѣд., 60 и будетъ общимъ искомымъ знаменателемъ данныхъ дробей.

Чтобы привести дробь $^{5}/_{12}$ къ знаменателю 60, достаточно раздѣлить 60 на 12 и на полученное частное 5 умножить числителя и знаменателя данной дроби; величина ея отъ этого не измѣнится; слѣд., $\frac{5}{12}=\frac{5.5}{12.5}=\frac{25}{60}$.

Чтобы привести дробь $^{8}/_{15}$ къ знаменателю 60, достаточно раздѣлить 60 на 15 и на полученное частное 4 умножить числителя и знаменателя данной дроби; величина ея отъ этого не измѣнится; слѣд., $^{8}/_{15}=\frac{8.4}{15.4}=^{32}/_{60}$.

Digitized by Google

Чтобы привести дробь $^3/_4$ къ знаменателю 60, достаточно раздѣлить 60 на 4 и на полученное частное 15 умножить числителя и знаменателя данной дроби; величина ея отъ этого не измѣнится: слѣд., $^3/_4 = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = {}^{45}/_{60}$.

Такимъ образомъ, по приведеніи дробей $^5/_{12}$, $^8/_{15}$ и $^3/_4$ къ общему знаменателю, получимъ: $^{25}/_{60}$, $^{32}/_{60}$ и $^{45}/_{60}$; эти дроби и будутъ искомыми.

Итакъ, **чтобы привести къ общему знаменателю дроби, знаменатели которыхъ — числа взаимно-составныя, надо сначала найти для знаменателей данныхъ дробей наименьшее кратное и сдѣлать его общимъ знаменателемъ; затѣмъ найденное кратное раздѣлить на знаменателя каждой дроби и на полученныя частныя соотвѣтственно умножить числителя и знаменателя той же дроби.**

2-й примѣръ. Привести къ наименьшему общему знаменателю дроби:

$$^7/_{45},\ ^5/_{63},\ ^3/_{70} \text{ и } ^{16}/_{105}.$$

1) Отыскиваемъ по § для знаменателей данныхъ дробей наименьшее кратное; оно будетъ равно 630.

2) Дѣлимъ найденное кратное на знаменателей 45, 63, 70 и 105; первое частное будетъ = 14, второе = 10, третье = = 9 и четвертое = 6.

3) Умножаемъ числителя и знаменателя первой дроби на 14, второй на 10, третьей на 9 и четвертой на 6; получимъ:

$$\frac{7 \cdot 14}{45 \cdot 14},\ \frac{5 \cdot 10}{63 \cdot 10},\ \frac{3 \cdot 9}{70 \cdot 9} \text{ и } \frac{16 \cdot 6}{105 \cdot 6} \text{ или же } \frac{98}{630},\ \frac{50}{630},\ \frac{27}{630} \text{ и } \frac{96}{630}.$$

3-й примѣръ. Привести къ наименьшему общему знаменателю дроби

$$^{95}/_{1776} \text{ и } ^{20}/_{259}.$$

Такъ какъ знаменателей данныхъ дробей нельзя разложить на множителей по извѣстнымъ намъ признакамъ дѣлимости, то поэтому наименьшее кратное для нихъ находимъ по §, т.-е. послѣдовательнымъ дѣленіемъ. Найденное такимъ образомъ наименьшее кратное будетъ равно 12432.

Digitized by Google

Частныя же отъ дѣленія 12432 на 1776 и 259 соотвѣтственно равны 7 и 37; искомыя же дроби будутъ равняться:

$$\frac{95 \cdot 7}{1776 \cdot 7} \text{ и } \frac{20 \cdot 37}{259 \cdot 37} \text{ или же } \frac{665}{12432} \text{ и } \frac{740}{12432}.$$

Какъ приводятся къ наименьшему общему знаменателю дроби, у которыхъ знаменатели—числа простыя между собою? Пусть, напр., дано привести къ общему наименьшему знаменателю дроби $^5/_8$, $^3/_5$ и $^7/_9$.

Такъ какъ знаменатели данныхъ дробей не имѣютъ между собою общихъ множителей, то наименьшее кратное ихъ по § должно равняться произведенію всѣхъ этихъ знаменателей, т.-е. $8 \times 5 \times 9$.

Частныя же, полученныя отъ дѣленія найденнаго кратнаго на знаменателя каждой дроби соотвѣтственно равны: первое $[(8 \cdot 5 \cdot 9) : 8] = 9$, второе $[(8 \cdot 5 \cdot 9) : 5] = 8 \cdot 9$ и третье $[(8 \cdot 5 \cdot 9) : 9] = 8 \cdot 5$; слѣд., искомыя дроби должны равняться:

$$1) \frac{5 \cdot 5 \cdot 9}{8 \cdot 5 \cdot 9}, \quad 2) \frac{3 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 8 \cdot 9} \text{ и } 3) \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 5} \text{ или же } \frac{225}{360}, \frac{216}{360} \text{ и } \frac{280}{360}.$$

Итакъ, **чтобы привести къ общему знаменателю дроби, у которыхъ между знаменателями нѣтъ общихъ множителей, достаточно числителя и знаменателя каждой дроби сразу умножить на всѣхъ прочихъ знаменателей, кромѣ своего.**

Какъ приводятся къ общему наименьшему знаменателю дроби, у которыхъ одинъ изъ знаменателей дѣлится на остальные? Пусть, напр., дано привести къ общему наименьшему знаменателю дроби $^5/_9$, $^7/_{24}$ и $^{25}/_{72}$. Такъ какъ наибольшій знаменатель 72 есть число кратное по отношенію къ прочимъ знаменателямъ, то, слѣд., 72 и есть наименьшее общее кратное всѣхъ знаменателей. Частныя отъ дѣленія 72 на 9 и 24 соотвѣтственно равны 8 и 3; искомыя же дроби будутъ равняться:

$$\frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} \text{ и } \frac{7 \cdot 3}{24 \cdot 3} \text{ или же } {}^{40}/_{72}, {}^{21}/_{72} \text{ и } {}^{25}/_{72}.$$

Итакъ, **если у дробей одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ прочихъ знаменателей, то онъ и будетъ общимъ знаменателемъ. Чтобы привести къ этому знаменателю**

Digitized by Google

дроби, достаточно раздѣлить его на каждаго изъ прочихъ знаменателей и на полученныя частныя соотвѣтственно умножить числителя и знаменателя каждой дроби.

Замѣчаніе. Приведеніемъ дробей къ общему знаменателю обыкновенно пользуются при сравненіи величины дробей (см. §), при сложеніи и вычитаніи дробей.

Замѣчаніе. Если понадобится дроби приводить къ общему числителю, то въ этомъ случаѣ обыкновенно поступаютъ точно такъ же, какъ и въ приведеніи дробей къ общему знаменателю—правила одни и тѣ же. Напр., дроби $^6/_{11}$, $^8/_9$ и $^{12}/_{25}$ приводимъ къ общему наименьшему числителю 24. Искомыя дроби будутъ:

$$\frac{6}{11}=\frac{6.4}{11.4}=\frac{24}{44};\quad \frac{8}{9}=\frac{8.3}{9.3}=\frac{24}{27}\text{ и }\frac{12}{25}=\frac{12.2}{25.2}=\frac{24}{50}.$$

или же $^{24}/_{44}$, $^{24}/_{27}$ и $^{24}/_{50}$.

---

§ 13. Нахожденіе частей какого-нибудь числа.

Какъ найти одну какую-либо долю цѣлаго числа? Пусть, напр., дано число 15 и требуется найти его четвертую долю.

Такъ какъ четвертая доля всякой величины, очевидно, въ 4 раза менѣе самой величины, то, слѣд., четвертая доля числа 15 должна быть въ 4 раза менѣе этого числа; отсюда, чтобы найти четвертую долю числа 15, достаточно только это число уменьшить въ 4 раза, получится $^{15}/_4$; эта дробь и будетъ искомой долей даннаго числа. Точно такимъ же образомъ можемъ найти вторую, третью, пятую... и вообще одну какую-либо долю цѣлаго числа.

Разсуждая по предыдущему, найдемъ, что 12-я доля 35 будетъ $= {}^{35}/_{12}$, 7-я доля $40 = {}^{40}/_7$, 25-я доля $8 = {}^8/_{25}$ и 20-я доля $9 = {}^9/_{20}$.

Какъ найти одну какую-либо долю дробнаго числа? 1) Пусть, напр., дана дробь $^5/_8$, и требуется найти ея третью долю.

Такъ какъ третья доля всякой величины въ 3 раза меньше самой величины, то, слѣд., для полученія третьей

Digitized by Google

доли $^5/_8$ достаточно только уменьшить эту дробь въ три раза, т.-е. $^5/_8 : 3$, получится $\frac{5}{8.3}$ или $^5/_{24}$; эта дробь и будетъ искомой долей $^5/_8$.

Точно такъ же найдемъ, что 7-я часть $^4/_5 = \frac{4}{5.7}$ или $^4/_{35}$; 10-я часть $^7/_8 = \frac{7}{8.10}$ или $^7/_{80}$ и т. п.

2) Если же какая-либо доля отыскивается отъ смѣшаннаго числа, то въ этомъ случаѣ смѣшанное число обыкновенно обращаютъ въ неправильную дробь и уже отъ этой дроби по предыдущему находятъ данную долю. Напр., $^1/_5$ числа $3^1/_4 = {}^{13}/_4 : 5$ или $= \frac{13}{20}$.

Какъ найти нѣсколько долей какого-нибудь числа? Зная находить одну долю даннаго числа, нетрудно найти и величину нѣсколькихъ его долей; для этого достаточно только найденную величину одной доли увеличить во столько разъ, сколько ищется долей.

Пусть, напр., требуется найти $^5/_9$ числа 20.

Отыскиваемъ сначала $^1/_9$ долю 20; эта доля на основаніи предыдущихъ разсужденій равна будетъ $^{20}/_9$. Чтобы получить 5 такихъ долей, достаточно, очевидно, найденную долю $^{20}/_9$ увеличить въ 5 разъ, т.-е. $^{20}/_9 \times 5$, получится $^{100}/_9$ или же $11^1/_9$; это число и будетъ искомой частью 20.

Найти $^4/_7$ числа 10.

Разсуждаемъ: $^1/_7$ этого числа въ 7 разъ менѣе 10, т.-е. равна $^{10}/_7$,

$^4/_7$ числа 10 въ 4 раза болѣе $^1/_7$ его, т.-е. равны $^{10}/_7 \times 4 = \frac{10.4}{7} = {}^{40}/_7$.

Найти $^8/_{15}$ числа $^7/_{12}$.

$^1/_{15}$ этого числа въ 15 разъ менѣе $^7/_{12}$, т.-е. равна $\frac{7}{12.15}$,

$^8/_{15}$ числа $^7/_{12}$ въ 8 разъ болѣе $^1/_{15}$ его, т.-е. равна $\frac{7.8}{12.15} = \frac{7.2}{3.15} = \frac{14}{45}$.

Найти $^9/_{20}$ числа $4^1/_6$.

Digitized by Google

Обративъ $4^1/_6$ въ неправильную дробь $^{25}/_6$, разсуждаемъ: $^1/_{20}$ числа этого числа въ 20 разъ менѣе $^{25}/_6$, то-есть равна $\frac{25}{6.20}$.

$^9/_{20}$ числа $^{25}/_6$ въ 9 разъ болѣе $^1/_{20}$ его, то-есть равны $\frac{25.9}{6.20} = \frac{5.3}{2.4} = \frac{15}{8} = 1^7/_8$.

---

§ 14. Нахожденіе цѣлаго числа по данной его части.

Какъ отыскивается неизвѣстное число по данной его части? Зная одну или нѣсколько частей какого-нибудь числа, можно найти все это число. Пусть, напр., требуется найти число, $^1/_5$ котораго $= 4$.

Такъ какъ искомое число, очевидно, въ 5 разъ больше своей пятой части, то, слѣд., оно равно 4×5 или же $= 20$.

Найти число, $^8/_{15}$ котораго $= 12$.

Опредѣляемъ сначала, чему равна $^1/_{15}$ искомаго числа, а затѣмъ уже—чему равно все искомое число.

Такъ какъ пятнадцатая часть искомаго числа, очевидно, менѣе $^8/_{15}$ его въ 8 разъ, то, слѣд., она равна $^{12}/_8$. Такъ какъ искомое число болѣе своей пятнадцатой части въ 15 разъ, то, слѣд., оно равно $^{12}/_8 \times 15$ или $= \frac{12.15}{8} = \frac{3.15}{2} =$
$= ^{45}/_2 = 22^1/_2$.

Найти число, $^3/_5$ котораго $= ^9/_{20}$.

Разсуждая по предыдущему, найдемъ: $^1/_5$ искомаго числа $= \frac{9}{20.3}$,

все искомое число

$$= \frac{9.5}{20.3} = \frac{3.1}{4.1} = ^3/_4.$$

Найти число, $^3/_4$ котораго $= 4^1/_2$.

$^3/_4$ искомаго числа $= ^9/_2$,

$^1/_4$ » » $= \frac{9}{2.3}$,

все искомое число $= \frac{9.4}{2.3} = \frac{3.2}{1.1} = 6$.

Digitized by Google

ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ПРОСТЫМИ ДРОБЯМИ.

§ 15. Сложеніе.

Сложить дроби—значитъ сосчитать, сколько во всѣхъ данныхъ дробяхъ одинаковыхъ долей единицы. А потому, **если дроби имѣютъ одинаковыхъ знаменателей, то для полученія суммы достаточно только сложить ихъ числителей и подъ суммою подписать того же общаго знаменателя.**

Напр.: 1) $^2/_{11} + ^3/_{11} + ^5/_{11} = \frac{2+3+5}{11} = ^{10}/_{11}$.

2) $^5/_{12} + ^1/_{12} + ^{11}/_{12} + ^7/_{12} = \frac{5+1+11+7}{12} = ^{24}/_{12} = 2$.

Если же дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то предварительно приводятъ ихъ къ общему знаменателю и затѣмъ уже складываютъ, какъ въ предыдущихъ примѣрахъ.

1) Дано сложить $^3/_{10}$, $^4/_{45}$ и $^5/_{12}$.

Приводимъ сначала данныя дроби къ общему наименьшему знаменателю:

$$^3/_{10} + ^4/_{45} + ^5/_{12} = ^{54}/_{180} + ^{75}/_{180} + ^{16}/_{180}.$$

Теперь складываемъ числителей и подъ суммою ихъ подписываемъ общаго знаменателя: $^{54}/_{180} + ^{75}/_{180} + ^{16}/_{180} = \frac{54+75+16}{180} = ^{145}/_{180} = ^{29}/_{36}$.

2) Дано сложить $^2/_3$, $^7/_{12}$, $^3/_{10}$ и $^9/_{20}$.

$$^2/_3 + ^7/_{12} + ^3/_{10} + ^9/_{20} = ^{40}/_{60} + ^{35}/_{60} + ^{18}/_{60} + ^{27}/_{60} = \frac{40+35+18+27}{60} = ^{120}/_{60} = 2.$$

Если даны для сложенія **смѣшанныя числа, то сперва складываютъ цѣлыя числа, потомъ дроби** и затѣмъ уже **находятъ полную сумму.**

Дано сложить $3^5/_{24}$, $7^{14}/_{25}$ и $9^{11}/_{40}$.

$$3^5/_{24} + 7^{14}/_{15} + 9^{11}/_{40} = 19\frac{25+112+33}{120} = 19^{170}/_{120} = 19^{17}/_{12} = 20^5/_{12}.$$

Digitized by Google

§ 16. Вычитаніе.

Вычесть изъ одной дроби другую—значитъ отъ большей дроби отнять столько долей единицы, сколько таковыхъ содержится въ меньшей. Вычитать одну дробь изъ другой, такъ же, какъ и складывать дроби, можно только съ одинаковыми знаменателями.

1) Чтобы произвести **вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями, надо изъ числителя большей дроби вычесть числителя меньшей и подъ разностью подписать того же общаго знаменателя.**

Дано изъ $^{11}/_{12}$ вычесть $^{7}/_{12}$.

$$^{11}/_{12} - {}^{7}/_{12} = \frac{11-7}{12} = {}^{4}/_{12} = {}^{1}/_{3}.$$

2) Если же **знаменатели дробей разные**, то сперва ихъ **приводятъ къ одинаковому знаменателю**, а потомъ уже и вычитаютъ.

Дано изъ $^{7}/_{12}$ вычесть $^{9}/_{20}$.

$$^{7}/_{12} - {}^{9}/_{20} = {}^{35}/_{60} - {}^{27}/_{60} = \frac{35-27}{60} = {}^{8}/_{60} = {}^{2}/_{15}.$$

3) Чтобы произвести **вычитаніе смѣшанныхъ чиселъ**, надо сначала **вычесть цѣлое число изъ цѣлаго, потомъ дробь изъ дроби и затѣмъ уже соединить полученныя разности.**

Дано найти разность чиселъ $8^{7}/_{12}$ и $3^{5}/_{12}$.

$$8^{7}/_{12} - 3^{5}/_{12} = 5\,\frac{7-5}{12} = 5^{2}/_{12} = 5^{1}/_{6}.$$

Дано найти разность чиселъ $9^{15}/_{16}$ и $4^{5}/_{6}$.

$$9^{15}/_{16} - 5^{5}/_{6} = 9^{45}/_{48} - 5^{40}/_{48} = 4\,\frac{45+40}{48} = 4^{5}/_{48}.$$

4) **Если дробь надо вычесть изъ цѣлаго числа**, то сперва берутъ одну единицу отъ цѣлаго числа, раздробляютъ ее въ доли вычитаемой дроби и затѣмъ уже производятъ вычитаніе.

Дано изъ 8 вычесть $^{9}/_{15}$.

$$8 - {}^{9}/_{15} = 7^{15}/_{15} - {}^{9}/_{15} = 7\,\frac{15-9}{15} = 7^{6}/_{15} = 7^{2}/_{5}.$$

5) **Если при вычитаніи смѣшанныхъ чиселъ окажется невозможнымъ вычесть дробь изъ дроби,** то тогда въ

Digitized by Google

уменьшаемомъ отъ цѣлаго числа занимаютъ единицу, обращаютъ ее въ надлежащія доли и, прибавивъ ихъ къ дроби уменьшаемаго, дѣлаютъ вычитаніе.

Дано изъ $18^3/_4$ вычесть $13^5/_6$.

$$18^3/_4 - 13^5/_6 = 5^3/_4 - {}^5/_6 = 5^9/_{12} - {}^{10}/_{12} = 4^{21}/_{12} - {}^{10}/_{12} = 4\,\frac{21-10}{12} = 4^{11}/_{12}.$$

---

§ 17. Умноженіе дробей.

Что значитъ умножить какое-нибудь число на цѣлое? Изъ ариѳметики цѣлыхъ чиселъ мы уже знаемъ, что, напр., **9 умножить на 4,** значитъ 9 повторить слагаемымъ 4 раза или 9 увеличить въ 4 раза; отсюда для насъ очевидно, что, напр., $^3/_5$ **умножить на 4,** означаетъ то же, что $^3/_5$ повторить слагаемымъ 4 раза или $^3/_5$ увеличить въ 4 раза; точно такъ же $2^4/_5$ **умножить на 4,** означаетъ то же, что $2^4/_5$ повторить слагаемымъ 4 раза или $2^4/_5$ увеличить въ 4 раза.

Итакъ, **умножить какое-нибудь число на цѣлое—значитъ повторить множимое слагаемымъ нѣсколько разъ или увеличить множимое въ нѣсколько разъ.**

Умноженіе дроби на цѣлое. Пусть, напр., дано $^5/_{18} \times 3$. $^5/_{18}$ умножить на 3—значитъ $^5/_{18}$ повторить слагаемымъ 3 раза или увеличить $^5/_{18}$ въ 3 раза; для этого по § 10 достаточно или числителя умножить на 3, или, если можно, раздѣлить знаменателя на то же число, т.-е.

$$^5/_{18} \times 3 = \frac{5 \cdot 3}{18} = \frac{15}{\overset{3}{\smile}18} = {}^5/_6, \text{ или же } {}^5/_{18} \times 3 = \frac{5}{18:3} = {}^5/_6.$$

2-й примѣръ. $^5/_7 \times 4 = \frac{5 \cdot 4}{7} = {}^{20}/_7 = 2^6/_7$.

3-й примѣръ. $^9/_{20} \times 5 = \frac{9}{20:5} = {}^9/_4 = 2^1/_4$.

Правило. Чтобы умножить дробь на цѣлое число, достаточно или числителя умножить на цѣлое число или же, если можно, знаменателя раздѣлить на то же число.

Digitized by Google

Умноженіе смѣшаннаго числа на цѣлое. Пусть, напр., дано $2^3/_5 \times 4$. Обративъ смѣшанное число въ неправильную дробь, мы можемъ свести заданный вопросъ къ предыдущему случаю, т.-е. $2^3/_5 \times 4 = {}^{13}/_5 \times 4$, а это по предыдущему равно $\frac{13 \cdot 4}{5} = {}^{52}/_5 = 10^2/_5$. Но тотъ же самый результатъ можно получить иначе. Такъ какъ $2^3/_5 \times 4$—значитъ повторить $2^3/_5$ слагаемымъ 4 раза или $2^3/_5$ увеличить въ 4 раза, то поэтому, увеличивая въ 4 раза сначала цѣлую часть, а потомъ дробную, найдемъ, что $2^3/_5 \times 4 = 8^{12}/_5$ или же по исключеніи изъ дроби цѣлаго числа $= 10^2/_5$.

Общее опредѣленіе умноженія. Опредѣленіе, которое дано умноженію въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ, и значеніе этого дѣйствія непримѣнимы, когда множителемъ служитъ какое-либо дробное число. Въ самомъ дѣлѣ, **при умноженіи,** напр., **5 на $^3/_8$ нельзя число 5 сложить само съ собою $^3/_8$ раза** или **5 увеличить въ дробное число ($^3/_8$) разъ.** Поэтому, перейдя къ умноженію чиселъ на дробь, дадимъ этому дѣйствію другое, но болѣе общее опредѣленіе и укажемъ, что значитъ умножить какое-нибудь число на дробь.

Опредѣленіе. Умноженіе есть дѣйствіе, при помощи котораго изъ множимаго составляютъ произведеніе такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы; при чемъ способъ составленія множителя разумѣется слѣдующій: 1) **когда множитель цѣлое число,** напр., 4, то для его составленія берутъ единицу и повторяютъ ее слагаемымъ 4 раза, т.-е. $4 = 1 + 1 + 1 + 1$; 2) **когда множитель дробь,** напр., $^3/_5$, то для ея составленія берутъ 1-цу, дѣлятъ ее на 5 равныхъ и одну такую часть повторяютъ слагаемымъ 3 раза, т.-е. $^3/_5 = {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$.

Чтобы убѣдиться въ томъ, что результатъ дѣйствія отъ замѣны прежняго опредѣленія новымъ не нарушится, разсмотримъ слѣдующій примѣръ.

Пусть, напр., множимое $= 8$, а множитель $= 3$.

Умножить 8 на 3—значитъ, согласно новому опредѣленію, изъ множимаго 8-ми составить произведеніе такъ, какъ множитель 3 составленъ изъ 1-цы, т.-е. съ 8-ю надобно сдѣлать то же самое, что сдѣлано съ 1-ю для полученія 3-хъ.

Digitized by Google

Но множитель 3 получился слѣдующимъ образомъ: единица складывалась сама съ собою 3 раза; слѣд., и множимое 8 надо сложить съ самимъ собою тоже 3 раза, т.-е. $8+8+8$. Теперь же для насъ очевидно, что по новому опредѣленію 8 умножить на 3 означаетъ то же, что 8 взять слагаемымъ 3 раза; а это вполнѣ согласно съ извѣстнымъ уже намъ прежнимъ опредѣленіемъ.

Что значитъ умножить какое-нибудь число на дробь? Пусть, напр., множимое $= 7$, а множитель $= {}^3/_4$.

Умножить 7 на ${}^3/_4$, значитъ, согласно новому опредѣленію, изъ 7 составить произведеніе такъ, какъ ${}^3/_4$ составлено изъ 1-цы, т.-е. съ 7-ю надобно сдѣлать то же самое, что сдѣлано съ 1-ю для полученія ${}^3/_4$. Но множитель ${}^3/_4$ получался слѣдующимъ образомъ: единица раздѣлена на 4 части и такихъ частей взято 3; слѣд., и множимое 7 точно такъ же надо раздѣлить на 4 части и такихъ частей взять 3, то-есть:

(${}^1/_4$ числа 7) + (${}^1/_4$ числа 7) + (${}^1/_4$ числа 7) или же ${}^3/_4$ числа 7;

отсюда мы видимъ, что умножить 7 на ${}^3/_4$—значитъ взять или найти ${}^3/_4$ части отъ 7. Точно такъ же по новому опредѣленію найдемъ, что ${}^3/_7 \times {}^5/_9$—значитъ найти ${}^5/_9$ отъ ${}^3/_7$; $3{}^5/_8 \times {}^4/_9$—значитъ найти ${}^4/_9$ отъ $3{}^5/_8$.

Итакъ, **умножить какое-нибудь число на дробь—значитъ найти одну или нѣсколько частей множимаго.**

Умноженіе цѣлаго числа на дробь. Пусть, напр., дано $9 \times {}^5/_7$.

9 умножить на ${}^5/_7$ значитъ найти ${}^5/_7$ отъ 9. По § находимъ:

$${}^1/_7 \text{ девяти} = {}^9/_7,$$

$${}^5/_7 \text{ девяти} = {}^9/_7 \times 5 = \frac{9 \times 5}{7};$$

слѣд.,
$$9 \times {}^5/_7 = \frac{9 \times 5}{7} = {}^{45}/_7 = 6{}^3/_7.$$

Умноженіе, понимаемое въ этомъ смыслѣ, не есть уже простое, но **составное дѣйствіе,** такъ какъ состоитъ изъ дѣленія даннаго числа на знаменателя дроби и умноженія полученнаго частнаго на ея числителя.

Digitized by Google

Замѣчаніе. Чтобы яснѣе себѣ представить, почему нахожденіе части отъ даннаго числа дѣлается посредствомъ умноженія цѣлаго числа на дробь, достаточно разсмотрѣть слѣдующаго рода двѣ задачи.

1) Фунтъ чаю стоитъ 4 рубля. Что стоятъ 7 фунтовъ такого же чаю?

2) Фунтъ чаю стоитъ 4 рубля. Что стоитъ $^5/_8$ фунта такого же чаю?

Весьма очевидно, что та и другая задача требуетъ одного и того же дѣйствія—умноженія. Но такъ какъ въ первой задачѣ дано цѣлое число фунтовъ, а во второй—дробное, то значенія этого дѣйствія различны. Въ первомъ случаѣ умноженіе понимается, какъ нахожденіе суммы равныхъ слагаемыхъ, т.-е. 4 раза по 3 руб., а во второмъ, какъ нахожденіе долей числа, т.-е. $^5/_8$ числа 3 руб. Итакъ, если по единицѣ отыскивается нѣсколько единицъ или нѣсколько частей единицы, то такого рода задачи дѣлаются посредствомъ умноженія.

Правило. Чтобы умножить цѣлое число на дробь, достаточно цѣлое число умножить на ея числителя и полученное произведеніе раздѣлить на ея знаменателя.

Таковое правило можно легко вывести слѣдующимъ способомъ:

дано $4 \times {}^5/_7$ (предыд. примѣръ).

Умножая 4 на 5, получимъ произведеніе 4×5 въ 7 разъ болѣе искомаго, такъ какъ, взявъ 5 вмѣсто $^5/_7$, мы увеличили множителя въ 7 разъ; раздѣливъ же 4×5 на 7, получимъ искомое произведеніе; слѣд.,

$$4 \times {}^5/_7 = \frac{4 \times 5}{7} \text{ и т. д.}$$

2-й примѣръ. $27 \times {}^8/_9 = \frac{27 \cdot 8}{9}$ или по сокращеніи на $9 =$

$$= \frac{3 \cdot 8}{1} = 24.$$

3-й примѣръ. $32 \times {}^9/_{40} = \frac{32 \cdot 9}{40}$ или по сокращеніи на $8 =$

$$= \frac{4 \cdot 9}{5} = {}^{36}/_5 = 7{}^1/_5.$$

Digitized by Google

Умноженіе дроби на дробь. Пусть, напр., дано $^2/_3 \times {}^4/_5$.

$^2/_3$ умножить на $^4/_5$ — значитъ найти $^4/_5$ отъ $^2/_3$. По § 13 находимъ:

$$^1/_5 \text{ часть отъ } {}^2/_3 = {}^2/_3 : 5 = \frac{2}{3 \times 5}$$

$$^4/_5 \text{ части отъ } {}^2/_3 = \frac{2}{3 \times 5} \times 4 \text{ или } = \frac{2 \times 4}{3 \times 5};$$

слѣд., $$^2/_3 \times {}^4/_5 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = {}^8/_{15}.$$

Задача. Фунтъ сахару стоитъ $^4/_{25}$ рубля. Что стоитъ $^7/_8$ фун. того же сахару?

Объясненіе. Для рѣшенія этой задачи нужно найти $^7/_8$ части отъ $^4/_{25}$ руб., т.-е. надо $^4/_{25}$ раздѣлить на 8 равныхъ частей и такихъ частей взять 7. Разсуждаемъ: такъ какъ фунтъ сахару стоитъ $^4/_{25}$ руб., то $^1/_8$ фунта будетъ стоить въ 8 разъ менѣе $^4/_{25}$ руб., т.-е. $^4/_{25} : 8$, что $= \frac{4}{25 \times 8}$, а $^7/_8$ фунта будутъ стоить въ 7 разъ болѣе $\frac{4}{25 \times 8}$ руб., то-есть $\frac{4}{25 \times 8} \times 7$, что $= \frac{4 \times 7}{25 \times 8}$ или же по сокращеніи на $4 = \frac{1 \cdot 7}{25 \cdot 2} = {}^7/_{50}$ руб.

Правило. Чтобы умножить дробь на дробь, достаточно перемножить отдѣльно числителей и знаменателей и произведеніе числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей.

Таковое правило можно легко вывести слѣдующимъ способомъ:

дано $^2/_3 \times {}^4/_5$ (предыд. примѣръ).

Если мы отбросимъ во множимомъ и во множителѣ знаменателей и умножимъ 2 на 4, то получимъ произведеніе $\times 4$; но такъ какъ, откинувъ знаменателей, мы увеличили ожимое въ 3 раза, а множителя въ 5 разъ, то произве-ie получилось у насъ въ 3×5 разъ болѣе искомаго;

Digitized by Google

слѣд., раздѣливъ 2×4 на 3×5, получимъ искомое произведеніе. Итакъ, $^2/_3 = {}^4/_5 = \frac{2\times4}{3\times5}$ и т. д.

2-й примѣръ. $^{56}/_{75}\times{}^{45}/_{64} = \frac{56\,.\,45}{75\,.\,64}$ или же по сокращеніи $= \frac{7\,.\,3}{5\,.\,8} = {}^{21}/_{40}$.

Замѣчаніе. Разсматривая цѣлое число, какъ дробь со знаменателемъ, равнымъ единицѣ, **можно по правилу умноженія дроби на дробь умножать и дробь на цѣлое число и цѣлое на дробь.** Пусть, напр., дано умножить $^7/_9$ на 4 и 5 на $^3/_8$.

Такъ какъ цѣлое число $4 = {}^4/_1$, а $5 = {}^5/_1$, то поэтому $^7/_9\times4$ будетъ $= \frac{7}{9}\times\frac{4}{1}$ или $= \frac{7\times4}{9\times1}$, а $5\times{}^3/_8$ будетъ $= \frac{5}{1}\times\frac{3}{8}$ или $= \frac{5\times3}{1\times8}$; отсюда мы заключаемъ, что **правило умноженія дроби на дробь есть общее,** т.-е. по этому правилу можно перемножать всякія числа.

Умноженіе смѣшаннаго числа на дробь. Пусть, напр., дано $7^4/_5\times{}^{15}/_{26}$.

$7^4/_5$ умножить на $^{15}/_{26}$—значитъ найти $^{15}/_{26}$ отъ $7^4/_5$. Обративъ смѣшанное число $7^4/_5$ въ неправильную дробь, найдемъ, что $7^4/_5\times{}^{15}/_{26} = \frac{39}{5}\times{}^{15}/_{26}$, а это по правилу умноженія дроби на дробь будетъ $= \frac{39.15}{5.26}$ или же по сокращеніи $=$ $= \frac{3\,.\,3}{1\,.\,2} = {}^9/_2 = 4^1/_2$.

Что значитъ умножить какое-нибудь число на смѣшанное число? Пусть, напр., множимое $= 5$, а множитель $2^3/_4$.

Умножить 5 на $2^3/_4$—значитъ, согласно новому опредѣленію, изъ 5 составить произведеніе такъ, какъ $2^3/_4$ составлено изъ единицы. Если бы у насъ дано было умножить 5 только на 2, то это значило бы 5 взять слагаемымъ 2 раза; а если бы дано было умножить 5 только на $^3/_4$, то это значило бы найти $^3/_4$ части отъ 5. Но такъ какъ въ данномъ примѣрѣ

Digitized by Google

требуется 5 умножить на $2^3/_4$, то это значитъ съ 5-ю надо сдѣлать одновременно и то и другое дѣйствіе, т.-е. 5 взять слагаемымъ 2 раза (5 + 5) и, кромѣ того, еще прибавить къ этому $^3/_4$ части отъ 5. Точно такъ же сообразимъ, что $^5/_8 \times 7^2/_3$—значитъ взять $^5/_8$ слагаемымъ 7 разъ и еще, кромѣ того, прибавить къ этому $^2/_3$ части отъ $^5/_8$; умножить $3^1/_4$ на $6^3/_{10}$—значитъ взять $3^1/_4$ слагаемымъ 6 разъ и, кромѣ того, еще прибавить къ этому $^3/_{10}$ части отъ $3^1/_4$.

Умноженіе цѣлаго числа на смѣшанное. Пусть, напр., дано $6 \times 3^2/_5$. Чтобы умножить 6 на $3^2/_5$, надо, согласно предыдущему, 6 увеличить въ 3 раза и къ полученному произведенію прибавить $^2/_5$ отъ 6, т.-е.

$$6 \times 3^2/_5 = 18 + {}^{12}/_5 = 18 + 2^2/_5 = 20^2/_5.$$

Но тотъ же самый результатъ можно получить иначе. Обративъ смѣшанное число $3^2/_5$ въ неправильную дробь, мы можемъ свести заданный вопросъ къ умноженію цѣлаго числа на дробь, т.-е.

$$6 \times 3^2/_5 = 6 \times {}^{17}/_5, \text{ а это будетъ} = \frac{6.17}{5} = \frac{102}{5} = 20^2/_5.$$

Нужно замѣтить, что послѣдній способъ умноженія цѣлаго числа на смѣшанное (и наоборотъ) только замедляетъ дѣйствіе; поэтому въ подобныхъ случаяхъ употребляется обыкновенно только первый способъ, т.-е. **цѣлую часть и дробную перемножаютъ отдѣльно.**

Задача. Фунтъ орѣховъ стоитъ 20 коп.; что стоятъ $4^3/_4$ фунта такихъ же орѣховъ?

Объясненіе. Прежде всего узнаемъ, сколько стоятъ 4 фунта. Если одинъ фунтъ стоитъ 20 коп., то 4 фунта стоятъ въ 4 раза больше, т.-е. 80 коп.; далѣе узнаемъ, сколько стоятъ $^3/_4$ фунта; $^1/_4$ часть фунта стоитъ $^{20}/_4$, а $^3/_4$ фунта въ 3 раза больше, т.-е. $^{60}/_4$, или по сокращеніи 15 коп.; слѣд., $4^3/_4$ фун. стоятъ $80 + 15$, что составляетъ 95 коп.

Умноженіе смѣшаннаго числа на смѣшанное. Пусть, напр., дано $2^3/_4 \times 3^1/_2$.

Чтобы перемножить смѣшанныя числа, достаточно обратить ихъ въ неправильныя дроби и полученныя числа перемножить, какъ дробь на дробь. Такимъ образомъ

Digitized by Google

$2^3/_4 \times 3^1/_2 = {}^{11}/_4 \times {}^7/_2$, а по правилу умноженія дроби на дробь будетъ $= \frac{11.7}{4.2} = {}^{77}/_8 = 9^5/_8$.

Но тотъ же самый результатъ можно получить и не обращая смѣшанныхъ чиселъ въ дроби. По предыдущему находимъ, что $2^3/_4 \times 3^1/_2 = (6 + {}^9/_4) + (1 + {}^3/_8)$; складывая всѣ произведенія, получимъ: $6 + {}^9/_4 + 1 + {}^3/_8 = 9^5/_8$.

Нетрудно видѣть, что послѣдній способъ гораздо сложнѣе перваго, а потому и не употребляется.

Умноженіе дроби на смѣшанное число точно такъ же производится по правилу умноженія дроби на дробь. Напр.:

$${}^3/_7 \times 5^2/_3 = {}^3/_7 \times {}^{17}/_3 = \frac{3.17}{7.3} = {}^{17}/_7 = 2^3/_7.$$

Задача. Аршинъ сукна стоитъ $2^4/_5$ руб.; сколько стоятъ $6^1/_4$ арш. такого же сукна?

Объясненіе. $6^1/_4$ аршина будутъ стоить дороже одного аршина; поэтому $2^4/_5$ надо помножить на $6^1/_4$. Обративъ смѣшанныя числа въ неправильныя дроби, найдемъ, что

$$2^4/_5 \times 6^1/_4 = \frac{14}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{14.25}{5.4} \text{ или же по сокращеніи} =$$

$$= \frac{7.5}{1.2} = {}^{35}/_2 = 17^1/_2 \text{ руб.}$$

Замѣчаніе. Разсматривая примѣры: 1) $6 \times {}^2/_3 = 4$, 2) $5 \times 1 = 5$, 3) $4 \times {}^5/_2 = 10$, замѣчаемъ, что **при умноженіи на дробь полученное произведеніе можетъ быть меньше, равно** или **больше множимаго,** смотря по тому, будетъ ли дробь множителя меньше, равна или больше единицы.

1) **Всякое число отъ умноженія на правильную дробь уменьшается;** изъ перваго примѣра видно, что произведеніе 4 меньше множимаго 6.

2) **Всякое число отъ умноженія на неправильную дробь увеличивается;** изъ третьяго примѣра видно, что произведеніе 10 больше множимаго 4.

3) **Всякое число отъ умноженія на дробь, равную единицѣ, остается безъ перемѣны;** изъ второго примѣра видно, что произведеніе равно множимому.

Digitized by Google

Перемноженіе нѣсколькихъ дробей. Пусть, напр., дано перемножить три дроби: $^{7}/_{12} \times {}^{8}/_{15} \times {}^{10}/_{21}$.

Перемножая двѣ первыя дроби, получимъ $\frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 15}$; умножая это число на третью дробь, получимъ $\frac{7 \cdot 8 \cdot 10}{12 \cdot 15 \cdot 21}$, или же по сокращеніи $= \frac{1.2.2}{3.3.3} = {}^{4}/_{27}$.

Итакъ, **чтобы перемножить нѣсколько дробей, достаточно перемножить отдѣльно числителей и знаменателей и произведеніе числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей.**

Если въ числѣ множителей есть **смѣшанныя числа,** то ихъ обыкновенно обращаютъ въ неправильныя дроби.

Если въ числѣ множителей встрѣчаются **цѣлыя числа,** то въ этомъ случаѣ цѣлое число разсматривается, какъ дробь со знаменателемъ, равнымъ 1-цѣ.

Примѣръ: $4^{1}/_{2} \times {}^{5}/_{18} \times 7 \times {}^{8}/_{21} \times 6^{3}/_{4} = \frac{9}{2} \times \frac{5}{18} \times \frac{7}{1} \times \frac{8}{21} \times \frac{27}{4} =$ $\frac{9.5.7.8.27}{2.18.1.21.4}$ или же по сокращеніи $= \frac{1.5.1.1.9}{1.2.1.1.1} = 22^{1}/_{2}$.

Замѣчаніе. **Во всѣхъ случаяхъ умноженія дробей удобнѣе сперва только обозначить дѣйствія,** потомъ, если можно, **сдѣлать сокращенія** и затѣмъ уже опредѣлить окончательный результатъ.

Изъ ариѳметики цѣлыхъ чиселъ извѣстно, что **отъ перемѣны порядка множителей произведеніе не измѣняется;** напр., $3 \times 5 = 5 \times 3$; то же самое свойство примѣняется и къ произведенію дробныхъ сомножителей, напр.:

1) $3 \times {}^{4}/_{5} = {}^{6}/_{5}$; точно такъ же и $^{4}/_{5} \times 3 = {}^{6}/_{5}$; слѣд., $3 \times {}^{4}/_{5} = {}^{4}/_{5} \times 3$.

2) $^{2}/_{5} \times {}^{3}/_{7} = {}^{6}/_{35}$; точно такъ же и $^{3}/_{7} \times {}^{2}/_{5} = {}^{6}/_{35}$; слѣд., $^{2}/_{5} \times {}^{3}/_{7} = {}^{3}/_{7} \times {}^{2}/_{5}$ или $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5}$.

3) $3^{1}/_{2} \times 5^{3}/_{4} = 5^{3}/_{4} \times 3^{1}/_{2}$.

Если дано перемножить нѣсколько дробей, то, кромѣ перемѣны порядка ихъ, **возможно перемножать по группамъ;** напр.:

$^{3}/_{4} \times {}^{7}/_{8} \times {}^{9}/_{15} \times {}^{13}/_{25} = ({}^{3}/_{4} \times {}^{13}/_{25}) \times ({}^{7}/_{8} \times {}^{9}/_{15})$.

Digitized by Google

§ 18. Дѣленіе дробей.

Въ цѣлыхъ числахъ мы видѣли, что **дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію; въ немъ по данному произведенію** (дѣлимому) **и по одному изъ сомножителей** (дѣлителю) **опредѣляется другой сомножитель** (частное).

Это **опредѣленіе примѣнимо и къ дѣленію дробныхъ чиселъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить, напр., $^3/_5$ на 8—это значитъ узнать, во-1), **какое число надо умножить на 8,** чтобы получить $^3/_5$, т.-е.

$$? \times 8 = {}^3/_5$$

и во-2), **на какое число надо умножить 8,** чтобы получить $^3/_5$, т.-е.

$$8 \times ? = {}^3/_5.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что посредствомъ дѣленія рѣшаются 2 вопроса: 1) **частное разсматривается какъ множимое** и 2) **частное разсматривается какъ множитель.** Соотвѣтственно этому каждый случай дѣленія дробныхъ чиселъ имѣетъ и **два значенія.** Разсмотримъ это.

1.

Значеніе дѣйствія дѣленія въ томъ случаѣ, когда частное разсматривается какъ множимое.

Что значитъ раздѣлить какое-нибудь число на цѣлое? Пусть, напр., дано $^4/_9 : 5$.

Раздѣлить $^4/_9$ на 5 значитъ найти такое частное, которое, будучи умножено на 5 или взято слагаемымъ 5 разъ, даетъ въ произведеніи $^4/_9$, т.-е.

$$? \times 5 = {}^4/_9.$$

Такъ какъ отъ умноженія на 5 искомое число увеличивается въ 5 разъ и даетъ въ произведеніи $^4/_9$, то слѣд.,

Digitized by Google

чтобы найти его, должно $^4/_9$ или уменьшить въ 5 разъ или же разложить на 5 равныхъ частей съ цѣлью узнать одну такую часть.

Къ такому же значенію приводится дѣленіе и смѣшаннаго числа на цѣлое. Раздѣлить, напр., $4^3/_5$ на 7 значитъ уменьшить $4^3/_5$ въ 7 разъ или разложить $4^3/_5$ на 7 равныхъ частей.

Итакъ, **разсматривая частное какъ множимое, мы видимъ, что дѣленіе какого-нибудь числа на цѣлое есть дѣйствіе, посредствомъ котораго или число уменьшается въ нѣсколько разъ или разлагается на равныя части.**

Дѣленіе дроби на цѣлое. Пусть, напр., дано $^8/_{15} : 4$.

По предыдущему это значитъ $^8/_{15}$ уменьшить въ 4 раза или разложить $^8/_{15}$ на 4 равныя части. Поступая по § 10, найдемъ:

1) $^8/_{15} : 4 = \frac{8}{15 \cdot 4} \overset{4}{=} \frac{2}{15 \cdot 1} = {}^2/_{15}$; 2) $^8/_{15} : 4 = \frac{8:4}{15} = {}^2/_{15}$.

Правило. Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, достаточно или знаменателя умножить на цѣлое число, оставивъ того же числителя, или же, если можно, числителя раздѣлить, оставивъ того же знаменателя.

Дѣленіе смѣшаннаго числа на цѣлое. Пусть, напр., дано $4^2/_3 : 5$.

Обративъ смѣшанное число въ неправильную дробь, найдемъ, что $4^2/_3 : 5 = {}^{14}/_3 : 5$; а это означаетъ то же, что и дѣленіе дроби на цѣлое; слѣд., $4^2/_3 : 5 = {}^{14}/_3 : 5 = \frac{14}{3 \cdot 5} = {}^{14}/_{15}$.

Что значитъ раздѣлить какое-нибудь число на дробь? Пусть, напр., дано $10 : {}^3/_4$.

Раздѣлить 10 на $^3/_4$ значитъ найти такое частное, которое, будучи умножено на $^3/_4$, даетъ въ произведеніи 10, т.-е.

$$? \times {}^3/_4 = 10.$$

Такъ какъ умножить искомое число на $^3/_4$ все равно, что взять $^3/_4$ этого числа, то поэтому данный вопросъ сводится къ отысканію именно такого числа, $^3/_4$ части котораго $= 10$; слѣд., $10 : {}^3/_4$ значитъ найти число, $^3/_4$ части котораго $= 10$.

Digitized by Google

Точно такъ же сообразимъ, что

1) $^7/_8 : {}^3/_5$ значитъ найти число, $^3/_5$ части котораго $= {}^7/_8$.

2) $3{}^4/_5 : {}^2/_9$ значитъ найти число, $^2/_9$ части котораго $= 3{}^4/_5$.

Къ этому же значенію приводится и дѣленіе любого числа на смѣшанное, достаточно только въ этомъ случаѣ смѣшанное число обратить въ неправильную дробь. Такъ, напр.:

$7 : 2{}^1/_2 = 7 : {}^5/_2$, а это значитъ найти число, $^5/_2$ частей котораго $= 7$ и т. п.

Итакъ, **раздѣлить какое-нибудь число на дробь или на смѣшанное число значитъ найти неизвѣстное частное по данной его части, равной дѣлимому.**

Дѣленіе цѣлаго числа на дробь. Пусть, напр., дано $8 : {}^5/_6$.

Раздѣлить 8 на $^5/_6$ значитъ узнать такое частное, $^5/_6$ части котораго $= 8$. Опредѣлимъ это число.

Если $^5/_6$ искомаго числа $= 8$, то

$^1/_6$ его въ 5 разъ менѣе 8, т.-е. $= {}^8/_5$,

все же искомое число въ 6 разъ болѣе $^8/_5$, т.-е. $=$

$$= {}^8/_5 \times 6 = {}^{48}/_5 = 9{}^3/_5.$$

2-й примѣръ. Дано $6 : {}^{18}/_{25}$. Это значитъ найти такое частное, $^{18}/_{25}$ котораго равны 6. Поступая по предыдущему, найдемъ:

$$6 : {}^{18}/_{25} = \frac{6 \cdot 25}{18} \overset{6}{=} \frac{1 \cdot 25}{3} = 8{}^1/_3.$$

Отсюда заключаемъ, что **опредѣленіе частнаго сводится къ опредѣленію цѣлаго по частямъ его** (см. § 11).

Дѣленіе, понимаемое въ этомъ смыслѣ, не есть уже *простое*, но *составное* дѣйствіе, такъ какъ состоитъ изъ дѣленія даннаго числа на числителя дроби и умноженія полученнаго частнаго на ея знаменателя.

Замѣчаніе. Чтобы яснѣе представить себѣ, почему нахожденіе числа по его части называется дѣленіемъ его на дробь и наоборотъ, достаточно разсмотрѣть слѣдующаго рода двѣ задачи:

1) Что стоитъ одинъ аршинъ сукна, если 5 арш. стоятъ 20 рублей?

Digitized by Google

2) Что стоитъ одинъ аршинъ сукна, если $^5/_2$ аршина стоитъ 10 руб.?

Весьма очевидно, что та и другая задача требуетъ одного и того же дѣйствія — дѣленія. Но такъ какъ въ первой задачѣ дано цѣлое число аршинъ, а во второй — дробное, то значенія этого дѣйствія различны. Въ первомъ случаѣ дѣленіе понимается, какъ разложеніе числа на равныя слагаемыя, съ цѣлью узнать одно такое слагаемое; во второмъ же случаѣ оно понимается, какъ нахожденіе числа по данной его части. Итакъ, если по нѣсколькимъ единицамъ или по частямъ единицы отыскивается единица, то такого рода задачи дѣлаются посредствомъ дѣленія.

Правило. Чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, достаточно цѣлое число умножить на ея знаменателя и полученное произведеніе раздѣлить на ея числителя.

Таковое правило можно легко вывести слѣдующимъ способомъ:

дано $8 : {}^5/_6$ (предыдущій примѣръ).

Раздѣливъ 8 на 5, получимъ частное $^8/_5$ въ 6 разъ менѣе искомаго, такъ какъ, взявъ 5 вмѣсто $^5/_6$, мы увеличили дѣлителя въ 6 разъ; умноживъ же $^8/_5$ на 6, получимъ искомое частное; слѣд.,

$$8 : {}^5/_6 = \frac{8 \cdot 6}{5} = {}^{48}/_5 = 9{}^3/_5 \text{ и т. п.}$$

Дѣленіе дроби на дробь. Пусть, напр., дано $^2/_5 : {}^3/_7$.

Раздѣлить $^2/_5$ на $^3/_7$ значитъ найти такое частное, $^3/_7$ части котораго $= {}^2/_5$.

Опредѣлимъ это число.

Если $^3/_7$ искомаго числа $= {}^2/_5$, то

$^1/_7$ его въ 3 раза менѣе $^2/_5$, т.-е. $= {}^2/_5 : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3}$

все же искомое число въ 7 разъ болѣе $\frac{2}{5 \cdot 3}$, т.-е.

$$\frac{2}{5 \cdot 3} \times 7 = \frac{2 \times 7}{5 \times 3} = \frac{14}{15}.$$

Правило. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно числителя 1-й дроби умножить на знаменателя 2-й, а

Digitized by Google

числителя 2-й дроби на знаменателя 1-й и первое произведеніе раздѣлить на второе.

Таковое правило можно легко вывести слѣдующимъ способомъ:

дано $^2/_5 : {}^3/_7$ (предыдущій примѣръ).

Раздѣливъ $^2/_5$ на 3, получимъ частное $\frac{2}{5 \times 3}$ менѣе искомаго въ 7 разъ, такъ какъ, взявъ 3 вмѣсто $^3/_5$, мы увеличили дѣлителя въ 5 разъ; умноживъ же $\frac{2}{5 \times 3}$ на 5, получимъ искомое частное $\frac{2 \times 7}{5 \times 3}$ слѣд.

$$^2/_5 : {}^3/_7 = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 2} = {}^{14}/_{15}.$$

Дѣленіе смѣшаннаго числа на дробь. Пусть, напр., дано $4^2/_5 : {}^{17}/_{15}$.. Раздѣлить $4^2/_5$ на $^{11}/_{15}$ значитъ найти такое частное, $^{11}/_{15}$ частей котораго $= 4^2/_5$. Обративъ смѣшанное число въ неправильную дробь, найдемъ, что $4^2/_5 : {}^{11}/_{15} = {}^{22}/_5 : {}^{11}/_{15}$; а это по правилу дѣленія дроби на дробь будетъ $= \frac{22 \times 15}{5 \times 11}$ или же по сокращеніи $= \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 6$.

Дѣленіе цѣлаго числа на смѣшанное. Пусть, напр., дано $15 : 6^3/_7$.

Обративъ смѣшанное число въ неправильную дробь, найдемъ, что $15 : 6^3/_7 = 15 : {}^{45}/_7$, а это по правилу дѣленія цѣлаго на дробь будетъ $= \frac{15 \cdot 7}{45}$ или же по сокращеніи $= \frac{1 \cdot 7}{3} = {}^7/_3 = 2^1/_3$.

Дѣленіе смѣшаннаго числа на смѣшанное. Пусть, напр., дано $9^5/_8 : 2^3/_4$.

Когда дѣлимое и дѣлитель — смѣшанныя числа, то таковыя сначала обращаютъ въ неправильныя дроби, а потомъ уже дѣлятъ какъ дробь на дробь.

Слѣд., $9^5/_8 : 2^3/_4 = {}^{77}/_8 \cdot {}^{11}/_4$; а это по правилу дѣленія дроби на дробь будетъ $= \frac{77 \times 4}{8 \times 11}$ или же по сокращеніи $= \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 1} = {}^7/_2 = 3^1/_2$.

Digitized by Google

Дѣленіе дроби на смѣшанное число точно такъ же производится по правилу дѣленія дроби на дробь.

Замѣчаніе. Разсматривая примѣры: 1) $8 : {}^4/_5 = 10$, 2) $8 : 1 = 8$, 3) $8 : {}^5/_4 = 6^2/_5$, замѣчаемъ, что **при дѣленіи на дробь полученное частное можетъ быть больше, равно, или меньше дѣлимаго**, смотря по тому, будетъ ли дробь дѣлителя больше, равна или меньше единицы.

1) **Всякое число отъ дѣленія на правильную дробь увеличивается;** изъ перваго примѣра видно, что частное 10 больше дѣлимаго 8.

2) **Всякое число отъ дѣленія на неправильную дробь уменьшается;** изъ третьяго примѣра видно, что частное 6 меньше дѣлимаго 8.

3) **Всякое число отъ дѣленія на дробь, равную единицѣ, остается безъ перемѣны;** изъ второго примѣра видно, что частное равно дѣлимому.

Дѣленіе дробныхъ чиселъ посредствомъ умноженія дѣлимаго на обращеннаго дѣлителя. Пусть, напр., дѣлимое ${}^5/_{16}$ и дѣлитель ${}^3/_7$.

По предыдущему находимъ, что ${}^5/_{16} : {}^3/_7 = \frac{5 \cdot 7}{16 \cdot 3}$. Но тотъ же самый результатъ получимъ, если ${}^5/_{16}$ умножимъ на ${}^7/_3$, т.-е. на дробь, обратную дѣлителю; въ самомъ дѣлѣ: ${}^5/_{16} \times {}^7/_3 = \frac{5 \cdot 7}{16 \cdot 3}$; слѣд.,

$${}^5/_{16} : {}^3/_7 \text{ все равно что } {}^5/_{16} \times {}^7/_3.$$

Итакъ, **чтобы раздѣлить какое-либо число на другое, достаточно дѣлимое умножить на обращеннаго дѣлителя.**

Примѣры: 1) ${}^5/_{12} : 3$ все равно, что ${}^5/_{12} \times {}^1/_3$

2) $9 : {}^4/_5$ все равно, что $9 \times {}^5/_4$,

3) $10 : 1^1/_3$ все равно, что $10 \times {}^3/_4$.

Замѣчаніе. Во всѣхъ случаяхъ дѣленія дробей удобнѣе сперва только обозначить дѣйствія, не производя ихъ на самомъ дѣлѣ, потомъ, если можно, **сдѣлать сокращенія** и **затѣмъ** уже **опредѣлить** окончательный результатъ.

Digitized by Google

II.

Значеніе дѣйствія дѣленія въ томъ случаѣ, когда частное разсматривается какъ множитель. Пусть, напр., дано $4^1/_2 : {}^3/_8$.

Раздѣлить $4^1/_2$ на $^3/_8$ значитъ отыскать частное, какъ число, на которое надо умножить $^3/_8$, чтобы получить $4^1/_2$, т.-е.

$$^3/_8 \times ? = 4^1/_2.$$

Отыскивая частное какъ множителя, мы должны разобрать два случая: во-1) **когда частное получится цѣлымъ числомъ** и во 2) **когда дробнымъ;** въ зависимости отъ того или другого случая и опредѣляется смыслъ дѣйствія дѣленія.

Раздѣливъ по предыдущему $4^1/_2$ на $^3/_8$, найдемъ, что искомое частное равно $\left(4^1/_2 : {}^3/_8 = {}^9/_2 : {}^3/_8 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 1} =\right) 12$;

слѣд., $$^3/_8 \times 12 = 4^1/_2.$$

Такъ какъ искомымъ частнымъ оказалось число цѣлое, то, слѣд., въ этомъ случаѣ мы узнавали, или сколько разъ надо взять $^3/_8$ слагаемымъ, чтобы получить $4^1/_2$, или же, другими словами, сколько разъ $^3/_8$ содержатся въ $4^1/_2$.

Точно такъ же сообразимъ, если раздѣлимъ, напр., $8^2/_5$ на $2^1/_{10}$.

По предыдущему найдемъ, что $8^2/_5 : 2^1/_{10} = \frac{42}{5} : \frac{21}{10} =$

$$= \frac{42 \cdot 10}{5 \cdot 21} = 4,$$

слѣд., $2^1/_{10} \times 4 = 8^2/_5$, а это при рѣшеніи нашего вопроса означаетъ, что $2^1/_{10}$ содержится въ $8^2/_5$ 4 раза.

Итакъ, **если отъ дѣленія одного числа на другое получилось частное цѣлое число, то это значитъ — мы узнавали, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.**

Возьмемъ теперь такой примѣръ, въ которомъ бы искомое частное оказалось числомъ дробнымъ. Пусть, напр., дано $^5/_8 : 3$.

Digitized by Google

Раздѣлить $^5/_8$ на 3 значитъ отыскать частное, какъ число, на которое надо умножить 3, чтобы получить $^5/_8$, т.-е.

$$3 \times ? = {}^5/_8.$$

На основаніи предыдущаго замѣчанія для насъ очевидно, что искомый множитель долженъ быть меньше 1-цы, т.-е. онъ долженъ быть правильной дробью. Но такъ какъ умножить какое-либо число на дробь значитъ найти часть отъ множимаго, то, слѣд., искомый дробный множитель показываетъ, какую часть отъ даннаго множимаго (3) составляетъ данное произведеніе. Отсюда заключаемъ, что **раздѣлить $^5/_8$ на 3 значитъ узнать, какую часть дѣлителя 3-хъ составляетъ дѣлимое** $^5/_8$ (получимъ $^5/_{24}$).

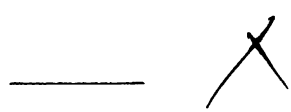
Точно такъ же сообразимъ, что раздѣлить, напр., 6 на 9, значитъ узнать, какую часть отъ 9 составляетъ 6 (получимъ $^2/_3$).

Вообще таковое разсужденіе примѣнимо ко всякому случаю дѣленія, въ которомъ дѣлимое меньше дѣлителя.

Итакъ, **если отъ дѣленія одного числа на другое получится частное дробное число, то это значитъ мы узнавали, какую часть дѣлителя составляетъ дѣлимое.**

Къ этому же значенію приводится дѣленіе и въ томъ случаѣ, когда частное окажется **числомъ смѣшаннымъ**.

Напр., $13 : 5 = 2^3/_5$. Разсматривая смѣшанное число, какъ неправильную дробь $^{13}/_5$, мы можемъ сказать, что при дѣленіи 13 на 5, мы узнавали, какую часть дѣлителя (5) составляетъ дѣлимое (13). Говорить же, что мы узнавали, сколько разъ 5 содержится въ 13, нельзя, такъ какъ это значеніе противорѣчитъ понятію «дробныхъ разъ».



Digitized by Google

§ 19. Дѣйствія надъ дробными составными именованными числами.

Раздробленіе.

Въ задачахъ на раздробленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ могутъ встрѣтиться слѣдующіе три случая:

1. Раздробить дробное простое именованное число въ простое же.

2. Раздробить дробное составное именованное число въ простое.

3. Раздробить дробное простое именованное число въ составное.

Примѣръ 1-й. Дано $^9/_{20}$ саж. раздробить въ дюймы. Такъ какъ въ цѣлой сажени содержится 7 фут., то, слѣдовательно, въ $^9/_{20}$ части ея будетъ содержаться футовъ $7 \times {}^9/_{20}$ (по цѣлому часть), что будетъ $= \frac{7.9}{20}$.

Далѣе, такъ какъ въ футѣ содержится 12 дюймовъ, то, слѣд., въ $\frac{7.9}{20}$ будетъ содержаться дюймовъ $12 \times \frac{7.9}{20}$, что составитъ $\frac{12.7.9}{20}$, или же по сокращеніи и исключеніи цѣлаго числа получимъ $37^4/_5$ дм.

Примѣръ 2-й. Дано 4 пуд. $5^2/_3$ фун. раздробить въ лоты. Раздробляя 4 пуд. въ фунты, получимъ: 4 пуд. $= 40$ ф. $\times 4 = 160$ фунт., всего же будетъ фунтовъ $160 + 5^2/_3$, т.-е. $165^2/_3$.

Раздробляя $165^2/_3$ фун. въ лоты, получимъ: $165^2/_3$ фун. $= 32 \times 165^2/_3$; это же $= 2661^1/_3$ лота.

Примѣръ 3-й. Выразить $^{21}/_{1000}$ составнымъ именов. числомъ. Раздробляя $^{21}/_{1000}$ версты въ сажени, получимъ:

$$\frac{21}{1000} = 500 \text{ саж.} \times {}^{21}/_{1000} = \frac{500.21}{1000} = {}^{21}/_2 = 10^1/_2 \text{ саж.}$$

Digitized by Google

Далѣе же, цѣлое число саженей удерживаемъ, а $^1/_2$ саж. раздробляемъ въ футы. Получимъ: $^1/_2$ саж. $= 7 \times {}^1/_2 = {}^7/_2 = 3^1/_2$ фут.

Теперь же 3 фут. удерживаемъ, а $^1/_2$ фут. раздробляемъ въ дюймы; получимъ: $^1/_2$ фут. $= 12 \times {}^1/_2 = {}^{12}/_2 = 6$ дм.

Слѣд., $^{21}/_{1000}$ верс. $= 10$ саж. 3 фут. 6 дм.

Итакъ, изъ указанныхъ примѣровъ видно, что раздробленіе дробныхъ именов. чиселъ дѣлается точно такъ же, какъ и раздробленіе цѣлыхъ именов. чиселъ, т.-е. данное число **посредствомъ умноженія послѣдовательно раздробляется въ мелкія мѣры.**

Превращеніе.

Въ задачахъ на превращеніе дробн. именов. чиселъ могутъ встрѣтиться два случая:

1. Превратить дробное простое именов. число въ простое же.

2. Превратить дробное составное именованное число въ простое.

Примѣръ 1-й. Превратить $6^2/_5$ вершка въ сажени.

Превращаемъ $6^2/_5$ верш. сначала въ аршины, а потомъ уже и въ сажени.

Превратить $6^2/_5$ верш. въ аршины—значитъ узнать, какую часть аршина составляетъ $6^2/_5$ верш. Такъ какъ 1 вершокъ составляетъ $^1/_{16}$ аршина, то, слѣд., $6^2/_5$ верш. составятъ аршинъ $\frac{6^2/_5}{16}$ или же $\frac{32}{5.16}$ арш. Далѣе, такъ какъ 1 арш. составляетъ $\frac{1}{3}$ сажени, то, слѣд., $\frac{32}{5.16}$ арш. составятъ саженей $\frac{32}{5.16} : 3$, т.-е. $\frac{32}{5.16.3}$, что $= {}^2/_{15}$ саж.

Примѣръ 2-й. Выразить 17 фун. 13 лот. $2^1/_5$ золотн. въ пудахъ (вѣрнѣе, какую часть пуда составляютъ 17 ф. 13 лот. $2^1/_5$ зол.). Обращая золотники сначала въ лоты, потомъ въ фунты и, наконецъ, въ пуды, найдемъ, что 17 ф. 13 л. $2^1/_{53} = \frac{4183}{9600}$ пуда.

Digitized by Google

Итакъ, **при превращеніе данное число посредствомъ дѣленія послѣдовательно превращается въ мѣры высшаго наименованія.**

Замѣчаніе. Дробное составное именованное число называется *простѣйшимъ или правильнымъ* только тогда, когда въ немъ дробнымъ числомъ выражены мѣры только низшаго наименованія. Напр., 7 саж. 4 фут. **$3^4/_5$ дм.—составное число правильное**, а 4 пуд. $7^3/_4$ фун. 15 лот. $2^1/_2$ зол.—**составное число неправильное;** по приведеніи къ простѣйшему виду оно = 4 пуд. 8 фун. 7 лот. $2^1/_2$ золот.

Сложеніе.

Дробныя составныя именованныя числа съ одинаковыми названіями мѣръ складываются, **какъ** составныя именованныя числа.

Примѣръ.

+		32 фун.	23 лот.	$1^3/_8$ золотн.
		18 »	12 »	$2^3/_4$ »
	1 пуд.	11 фун.	4 лот.	$1^1/_8$ золотн.

Дробныя составныя именованныя числа съ различными названіями мѣръ складываются, какъ отвлеченныя числа; достаточно при этомъ всѣ данныя мѣры выразить въ мѣрахъ одного названія.

Примѣръ. $2^3/_8$ пуд. + $15^1/_6$ фун. + $24^1/_2$ лот.

Выразивъ всѣ слагаемыя, напр., въ фунтахъ, получимъ: 95 фун. + $15^1/_6$ фун. + $^{49}/_{64}$ фун.; это будетъ—$101^5/_{64}$ фунт.

Вычитаніе.

При вычитаніи дробныхъ составныхъ именованныхъ чиселъ нужно пользоваться тѣми же самыми указаніями, которыми пользовались и при сложеніи.

1-й примѣръ.

−	45 верс.	84 саж.	6 фут.	$7^3/_5$ дюйм.
	29 »	54 »	0 »	$9^1/_2$ »
	16 верс.	30 саж.	5 фут.	$10^1/_{10}$ дюйм.

2-й примѣръ. Изъ $^7/_8$ арш. — $5^3/_4$ верш.

Выразивъ уменьшаемое въ вершкахъ, получимъ:

14 верш. — $5^3/_4$ верш; это будетъ равно $8^1/_4$ верш.

Digitized by Google

Умноженіе.

При умноженіи дробныхъ именованныхъ чиселъ должно умножить на множителя всѣ слагаемыя множимаго и полученныя отдѣльныя произведенія сложить.

Пусть, напр., дано 5 саж. 2 фут. $4^1/_2$ дм. умножить на $4^2/_5$.

Умножаемъ сначала на $4^2/_5$ 5 саж., потомъ—2 фут. и, наконецъ, $4^1/_2$ дм.

Первое произведеніе будетъ $= 5 \times 4^2/_5 = 22$ саж.

Второе » » $= 2 \times 4^2/_5 = 8^4/_5$ фут.

Третье » » $= 4^1/_2 \times 4^2/_5 = 19^4/_5$ дм.

Сумма же трехъ произведеній $= 22$ саж. $8^4/_5$ фут. $19^4/_5$ дм., или же по приведеніи къ простѣйшему виду $= 23$ саж. 3 фут. $5^2/_5$ дм.

Дѣленіе.

При дѣленіи дробныхъ именованныхъ чиселъ могутъ быть два случая:

1-й случай. **Дѣленіе на число отвлеченное.**

Пусть, напр., дано раздѣлить 8 саж. $4^1/_5$ фут. на $3^3/_4$.

Выразивъ дѣлимое въ мѣрахъ одного наименованія, напримѣръ, въ саженяхъ, найдемъ, что (8 саж. $4^1/_5$ фут.) : $: 3^3/_4 = 8^3/_5$ саж. : $3^3/_4$; это же $= \frac{43}{5}$ саж. : $\frac{15}{4} = {}^{43}/_{12} =$ $= 3^7/_{12}$ саж.

2-й случай. **Дѣленіе на число именованное.**

Пусть, напр., дано раздѣлить 6 пуд. $26^1/_4$ фун. на 4 пуд. $17^1/_2$ фун. Выразивъ дѣлимое и дѣлителя въ мѣрахъ одного названія (напр., въ фунтахъ), найдемъ, что

(6 пуд. $26^1/_4$ фун.) : (4 пуд. $17^1/_2$ фун.) $= 266^1/_4$ фун. : $177^1/_2$ фун.;

это же $= \frac{1065}{4} : \frac{355}{2} = {}^3/_2 = 1^1/_2$ (**частное — число отвлеченное**).

Digitized by Google

III.

ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

§ 20. **Какія дроби называются десятичными?** Десятичными дробями называются такія дроби, которыя имѣютъ **знаменателемъ** или число 10, или 100, или 1000 и т. д., вообще **единицу съ однимъ или нѣсколькими нулями.** Такъ, напр., дроби $\frac{7}{10}, \frac{59}{100}, \frac{83}{1000}, \frac{209}{10000}$ называются десятичными дробями.

Всѣ же остальныя дроби, съ другими знаменателями, напр., $^4/_9$, $^{12}/_{25}$, $^{27}/_{80}$, $^{48}/_{97}$, $^{30}/_{200}$ и т. п. въ отличіе отъ десятичныхъ называются простыми или обыкновенными дробями.

Почему дроби, имѣющія знаменателемъ 1-цу съ однимъ или нѣсколькими нулями, называются десятичными? Свое названіе десятичныя дроби получили оттого, что **знаменателемъ ихъ служитъ, хотя и въ разныхъ степеняхъ, но одно и то же число 10;** такъ, въ дроби $^7/_{10}$ знаменатель есть просто число 10; въ дроби $^{59}/_{100}$ знаменатель есть тоже число 10, но только во второй степени, т.-е. $^{59}/_{10^2}$; въ дроби $^{83}/_{1000}$ знаменатель есть тоже число 10, но только въ третьей степени, т.-е. $^{83}/_{10^3}$ и т. д.

Какія доли единицы входятъ въ составъ десятичныхъ дробей? Въ составъ десятичныхъ дробей обыкновенно входятъ доли десятыя, сотыя, тысячныя, десятитысячныя и т. д.; **эти доли называются десятичными;** при чемъ десятыя доли, какъ самыя крупныя послѣ цѣлыхъ единицъ, составляютъ первый разрядъ десятичныхъ долей, сотыя—второй, тысячныя—третій и т. д.

Digitized by Google

Въ какомъ постоянномъ отношеніи находятся между собою десятичныя доли? Десятичныя доли находятся между собою въ такомъ же отношеніи, какъ и единицы различныхъ разрядовъ въ цѣлыхъ числахъ, а именно: **каждая десятичная доля въ десять разъ больше слѣдующей за ней мелкой десятичной доли и въ 10 разъ меньше предшествующей ей крупной десятичной доли.** Такъ, напр., $^1/_{10}$ въ десять разъ больше $^1/_{100}$ и въ 10 разъ меньше 1-цы; $^1/_{100}$ въ 10 разъ больше $^1/_{1000}$ и въ 10 разъ меньше $^1/_{10}$ и т. п. **Итакъ, отношеніе между подобными долями постоянно десятичное.** Отсюда мы заключаемъ, что разряды десятичныхъ долей находятся въ такой тѣсной связи съ разрядами цѣлыхъ чиселъ, что система разрядовъ десятичныхъ долей можетъ вполнѣ служить продолженіемъ системы разрядовъ цѣлыхъ чиселъ. Изобразимъ это наглядно.

И т. д. безъ конца.	Десятки тысячъ.	Тысячи.	Сотни.	Десятки.	Единицы.	Десятыя доли.	Сотыя доли.	Тысячныя доли.	Десятитысячныя доли.	И т. д. безъ конца.
.....	5	4	3	2	1	1	2	3	4	.....

Какъ обыкновенно изображаются десятичныя дроби? Такъ какъ система разрядовъ десятичныхъ долей служитъ продолженіемъ системы разрядовъ цѣлыхъ чиселъ, то отсюда очевидно, что **десятичныя дроби можно изображать такъ же, какъ и цѣлыя числа, т.-е. безъ знаменателя.** Такъ какъ намъ извѣстно, что при обозначеніи цѣлыхъ чиселъ единицы каждаго разряда занимаютъ свое особое мѣсто, то точно такъ же и при письменномъ обозначеніи десятичныхъ дробей десятыя, сотыя, тысячныя и другія десятичныя доли должны занимать свое особое мѣсто. Въ этомъ случаѣ для яснаго обозначенія десятичной дроби принято **отдѣлять цѣлые разряды отъ дробныхъ запятой;**

Digitized by Google

если же при дроби нѣтъ цѣлаго числа, то тогда передъ запятой ставится 0, послѣ же запятой на первомъ мѣстѣ пишутся десятыя доли, на второмъ—сотыя, на третьемъ—тысячныя и т. д.; мѣста тѣхъ разрядовъ долей, о которыхъ не упоминается, замѣщаются нулями. Итакъ, если мы видимъ нѣсколько цифръ, написанныхъ подъ рядъ, и между ними есть запятая, то этимъ числомъ обозначается десятичная дробь, написанная безъ знаменателя. Такъ, напр., число 23,5804 изображаетъ десятичную дробь 23 цѣлыхъ 5 десятыхъ 8 сотыхъ 4 десятитысячныхъ; число 0,50709 означаетъ 0 цѣлыхъ 5 десятыхъ 7 тысячныхъ 9 стотысячныхъ.

Замѣтимъ, что **цифры, стоящія послѣ запятой, называются десятичными знаками.** Въ числѣ 23,5804 находятся 4 десятич. знака.

Какъ обратить десятичную дробь въ простую? Пусть, напр., дано 0,59 обратить въ дробь простую. На основаніи предыдущаго 0,59 означаетъ $^5/_{10} + {}^9/_{100}$, а это по приведеніи къ общему знаменателю равно $^{59}/_{100} + {}^6/_{100}$, или же $= {}^{59}/_{100}$; слѣд., $0,59 = {}^{59}/_{1000}$.

2-й примѣръ. $0,3104 = {}^3/_{10} + {}^1/_{100} + {}^4/_{10000} = {}^{3000}/_{10000} + {}^{100}/_{10000} + {}^4/_{10000} = \frac{3104}{10000}$.

3-й примѣръ. $6,14 = 6 + {}^1/_{10} + {}^4/_{100} = \frac{600}{100} + \frac{10}{100} + \frac{4}{100} = \frac{614}{100}$. Эту же десятичную дробь можно обратить въ простую еще такимъ образомъ: $6,14 = 6 + 0,14 = 6 + \frac{14}{100} = 6\frac{14}{100}$.

Итакъ, **чтобы обратить десятичную дробь въ простую, достаточно, отбросивъ запятую, полученное число взять числителемъ дроби, а знаменателемъ подписать 1-цу со столькими нулями, сколько десятичныхъ знаковъ находится послѣ запятой.** (Этотъ знаменатель всегда равенъ знаменателю долей послѣдняго десятичнаго знака).

Digitized by Google

Какъ читаются десятичныя дроби? Пусть, напр., дано прочитать десятичную дробь, написанную числомъ 34,508106.

Данную десятичную дробь можно прочитать различными способами:

1-й способъ.

Произносимъ сначала цѣлую часть дроби, говоря 34; послѣ же этого, начиная отъ запятой, читаемъ по порядку **каждую цифру** отдѣльно, произнося при этомъ и самыя доли, **указанныя мѣстомъ** цифры, именно: 5 десятыхъ 8 тысячныхъ 1 десятитысячныхъ 6 милліонныхъ. Итакъ, все это десятичное число можно прочитать: 34 **цѣлыхъ** 5 десятыхъ 8 тысячныхъ 1 десятитысячныхъ 6 милліонныхъ. **Такое чтеніе десятичныхъ дробей** обыкновенно называется чтеніемъ **по разрядамъ.**

2-й способъ.

Данную **десятичную дробь читаемъ такъ, какъ обыкновенно читаются смѣшанныя числа въ простыхъ дробяхъ,** именно: произносимъ сначала такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ цѣлую часть дроби, т.-е. 34, потомъ же все число, стоящее послѣ запятой, читаемъ сразу, говоря 508 тысячъ 106, и добавляемъ при этомъ слово **„милліонныхъ“,** т.-е. названіе тѣхъ долей, которыми выражается послѣдній десятичный знакъ 6. Итакъ, 34,508106 можно прочитать $34\frac{508106}{1000000}$. Этотъ способъ чтенія десятичныхъ дробей основанъ на обращеніи ихъ въ простыя. Въ самомъ дѣлѣ, если мы отдѣлимъ отъ данной десятичной дроби 34 цѣлыхъ, то оставшаяся дробная часть будетъ равна 0,508106; это же при обращеніи въ простую дробь будетъ $= \frac{508106}{1000000}$; слѣд., $34{,}508106 = 34\frac{508106}{1000000}$. Этимъ способомъ обыкновенно читаются дроби съ небольшимъ количествомъ десятичныхъ знаковъ.

Digitized by Google

3-й способъ.

Эту же **десятичную дробь можно прочитать неправильною дробью**, а именно: произносимъ сразу, не обращая вниманія на запятую, все число какъ цѣлое, т.-е. 34 милліона 508 тысячъ 106 и добавляемъ при этомъ слово «милліонныхъ» — опять названіе тѣхъ долей, которыми выражается послѣдняя цифра. Итакъ, 34,508106 можно прочитать $\frac{34508100}{1000000}$. Этимъ способомъ обыкновенно читаются дроби съ большимъ количествомъ десятичныхъ знаковъ. Когда при дроби нѣтъ цѣлаго числа, то въ этомъ случаѣ **„нуль цѣлыхъ“ обыкновенно не произносится;** напр., десятичная дробь 0,308 читается такъ: 308 тысячныхъ.

Какъ записываются десятичныя дроби подъ диктовку? Записываніе десятичныхъ дробей подъ диктовку зависитъ отъ способа ихъ произношенія.

1. Если какую-либо **десятичную дробь диктуютъ намъ по разрядамъ**, т.-е. называя единицы каждаго разряда, то тогда пишемъ сначала число цѣлыхъ, если оно есть, или 0, если его нѣтъ, и ставимъ запятую; затѣмъ же по мѣрѣ произношенія записываемъ сначала десятыя доли, потомъ сотыя, тысячныя и т. д. по порядку разрядовъ долей; при чемъ мѣста тѣхъ разрядовъ, о которыхъ не упоминается, замѣщаемъ нулями. Напр., десятичная дробь 5 цѣлыхъ 2 десятыхъ 7 тысячныхъ 8 стотысячныхъ записывается такъ: 5,20708.

Дробь же 4 сотыхъ 9 тысячныхъ 3 милліонныхъ записывается такъ: 0,049003.

2. Допустимъ теперь, что намъ **диктуютъ десятичную дробь такъ, какъ обыкновенно произносится простая дробь;** напр.: 83 тысячныхъ. Такъ какъ въ диктуемой дроби о цѣлыхъ единицахъ не упоминается, то поэтому пишемъ сначала 0 и послѣ него ставимъ запятую; далѣе же, сообразивъ по названному знаменателю («тысячныхъ»), что послѣ запятой должны быть три цифры (см. таблицу), записываемъ число 83 такъ, чтобы послѣдняя цифра 3 приходилась

Digitized by Google

на мѣстѣ тысячныхъ долей, т.-е. послѣ запятой пишемъ опять 0 и уже къ нему приписываемъ 83. Итакъ, продиктованная дробь должна записаться числомъ 0,083.

Дробь 805 милліонныхъ записывается такъ: 0,000805.

3. Положимъ, что намъ **диктуютъ десятичную дробь такъ, какъ обыкновенно произносятся смѣшанныя числа въ простыхъ дробяхъ;** напр.: 20 цѣлыхъ 705 десятитысячныхъ. Такъ какъ въ диктуемой дроби прежде всего слышатся цѣлыя единицы, то поэтому мы сперва пишемъ число 20 и послѣ него ставимъ запятую; далѣе же, сообразивъ по названному знаменателю («десятитысячныхъ»), пишемъ послѣ запятой четыре цифры: 0705. Итакъ, продиктованная дробь должна записаться числомъ 20,0705.

4. Пусть, напр., намъ **диктуютъ десятичную дробь такъ, какъ обыкновенно произносится неправильная простая дробь;** напр.: 9405 сотыхъ. Въ этомъ случаѣ, не обращая вниманія на знаменателя, пишемъ прямо все число 9405; далѣе же, начиная съ послѣдней цифры, отдѣляемъ запятой столько знаковъ, сколько нулей въ знаменателѣ; получимъ 94,05.

Замѣчаніе. Чтобы безошибочно писать десятичныя дроби, должно помнить слѣдующее правило: **въ числителѣ десятичной дроби послѣ запятой должно быть всегда столько цифръ, сколько въ знаменателѣ нулей.**

Какъ узнать, какая изъ двухъ или нѣсколькихъ десятичныхъ дробей больше и какая меньше? Изъ двухъ десятичныхъ дробей **больше та, у которой число цѣлыхъ больше** (1-й признакъ); если же цѣлыя числа одинаковы, или ихъ совсѣмъ нѣтъ, то тогда **большею считается та дробь, въ которой десятыхъ долей больше** (2-й признакъ); если и десятыя доли одинаковы, то тогда **считается большею та дробь, въ которой сотыхъ долей больше** и т. д. Пусть, напр., даны дроби: 0,23, 0,315, и 0,0418, и требуется узнать, какая изъ нихъ наибольшая, и какая наименьшая. Разсматривая данныя дроби, можно съ перваго взгляда замѣтить, что вторая дробь больше другихъ, потому что въ ней десятыхъ долей 3, тогда какъ въ первой дроби ихъ только 2, а въ третьей ихъ совсѣмъ нѣтъ;

Digitized by Google

третья дробь и будетъ наименьшей. Изъ дробей 0,7908, 0,759 и 0,78402 наибольшая будетъ первая, а наименьшая вторая. Нужно замѣтить, что сравнивать десятичныя дроби гораздо легче, чѣмъ простыя, такъ какъ нѣтъ надобности приводить ихъ къ общему знаменателю.

Измѣнится ли величина десятичной дроби, если припишемъ къ ней или отбросимъ отъ нея одинъ, два, три и т. д. нулей справа? Пусть, напр., дана дробь 0,3. Приписавъ къ данной дроби съ правой стороны одинъ нуль, получимъ 0,30. Сравнивая числителя и подразумѣваемаго знаменателя данной дроби съ числителемъ и подразумѣваемымъ знаменателемъ полученной, найдемъ, что, приписывая нуль справа, мы одновременно увеличили числителя и знаменателя данной дроби въ одинаковое число разъ, т.-е. въ 10; отчего, какъ намъ извѣстно, величина дроби не мѣняется; слѣд., $0,3 = 0,30$. Точно такъ же найдемъ, что $0,3 = 0,300 = 0,3000 = 0,30000 = \ldots$. Итакъ, **ко всякой десятичной дроби можно приписать сколько угодно нулей справа; величина дроби не мѣняется.**

Какъ десятичныя дроби приводятся къ общему знаменателю? Пусть, напр., дано привести къ общему знаменателю дроби: 43,08, 5,375, 0,5432. Привести данныя дроби къ общему знаменателю значитъ замѣнить ихъ такими равными имъ дробями, **которыя бы имѣли одинаковое число десятичныхъ знаковъ**, т.-е. одинаковыхъ знаменателей; чтобы это сдѣлать, достаточно приписать къ каждой изъ данныхъ дробей справа столько нулей, чтобы число десятичныхъ знаковъ было одно и то же; отъ этого, какъ намъ извѣстно, величина дробей не измѣнится. Приписавъ къ первой дроби два нуля справа, ко второй—одинъ, найдемъ, что 43,0800, 5,3750, 0,5432 имѣютъ одно и то же число десятичныхъ знаковъ; слѣд., данныя дроби приведены къ общему знаменателю.

Правило. Чтобы привести десятичныя дроби къ общему знаменателю, достаточно число ихъ десятичныхъ знаковъ уравнять нулями, приписывая ихъ справа.

Digitized by Google

Измѣнится ли величина десятичной дроби, если зачеркнемъ въ ней одинъ или нѣсколько нулей справа? Пусть, напр., дана дробь 5,900. Зачеркнувъ въ данной дроби одинъ нуль, получимъ 5,90. Сравнивая числителя и подразумѣваемаго знаменателя данной дроби съ числителемъ и подразумѣваемымъ знаменателемъ полученной, найдемъ, что, **зачеркнувъ нуль справа, мы одновременно уменьшили и числителя и знаменателя данной дроби въ одинаковое число разъ,** т.-е. въ 10; отчего, какъ намъ извѣстно, **величина дроби не мѣняется**; слѣд., 5,900=5,90. Точно такъ же найдемъ, что 0,150000 = 0,15000= = 0,1500 = 0,150 = 0,15.

На этомъ свойствѣ десятичныхъ дробей основано сокращеніе дробей.

Какъ десятичныя дроби сокращаются? Чтобы сократить десятичную дробь, **достаточно зачеркнуть въ ней справа нули, которыми она оканчивается.** Напр.: 0,6300 = = 0,63. Въ этомъ и состоитъ сокращеніе.

Какъ измѣнится величина десятичной дроби, если перенести въ ней запятую вправо черезъ одну, двѣ, три,... 5 и т. д. цифръ? Для примѣра возьмемъ десятичную дробь 4,3875. Переставивъ въ данной дроби запятую вправо черезъ одну цифру, получимъ 43,875. Сравнивая данную дробь съ полученной, нетрудно замѣтить, что, хотя цифры въ той и другой дроби и одинаковы, но зато значенія ихъ по занимаемому мѣсту различны. Такъ, въ 1-й дроби цифра 4 означала 4 единицы, а во 2-й эта же самая цифра означаетъ 4 десятка, слѣд., значеніе этой цифры увеличилось въ 10 разъ (4 десятка больше 4 единицъ въ 10 разъ); затѣмъ, въ 1-й дроби цифра 3 означала 3 десятыхъ, а во 2-й эта же самая цифра означаетъ 3 единицы; слѣд., значеніе и этой цифры увеличилось въ 10 разъ (3 единицы больше 3-хъ десятыхъ въ 10 разъ); далѣе, въ 1-й дроби цифра 8 означала 8 сотыхъ, а во 2-й эта же самая цифра означаетъ 8 десятыхъ; слѣд., значеніе и этой цифры увеличилось въ 10 разъ и т. д.; вообще значеніе каждой цифры увеличилось въ 10 разъ. Но если всѣ слагаемыя данной дроби (отъ перенесенія запятой вправо черезъ одну цифру) увеличились въ 10 разъ, то, слѣд., и

Digitized by Google

вся дробь должна увеличиться въ 10 разъ. Итакъ, **отъ перенесенія запятой вправо черезъ одну цифру десятичная дробь увеличивается въ 10 разъ.**

Точно такъ же найдемъ, что **отъ перенесенія запятой вправо черезъ двѣ цифры десятичная дробь увеличится въ 100 разъ, черезъ три цифры—въ 1000 разъ и т. д.**

Наоборотъ, чтобы увеличить десятичную дробь въ 10, въ 100, въ 1000 и т. д. разъ, достаточно перенести запятую вправо черезъ одну, двѣ, три и т. д. цифръ. Вообще, **чтобы умножить десятичную дробь на 1-цу съ однимъ или нѣсколькими нулями, достаточно перенести запятую вправо черезъ столько цифръ, сколько нулей во множителѣ; если же десятичныхъ знаковъ недостаетъ,** т.-е. если надобно перенести запятую черезъ три цифры, а ихъ всего двѣ, **то тогда дополняютъ число ихъ нулями, приписавъ къ десятичной дроби справа.** Напр.: 1) $3{,}0508 \times 100 = 305{,}08$; 2) $0{,}01205 \times 1000 = 0012{,}05$ или же $= 12{,}05$; 3) $4{,}56 \times 1000 = 4560$; 4) $0{,}051 \times 10000 = 00510$ или же $= 510$.

Какъ измѣнится величина десятичной дроби, если зачеркнуть въ ней запятую? Пусть, напр., дана дробь 2,04; зачеркнувъ въ ней запятую, получимъ 204. Ясно, что, зачеркнувъ запятую въ данной дроби, мы этимъ самымъ одновременно отбросили ея знаменателя; а такъ какъ знаменатель ея есть 100, то, слѣд., мы увеличили данную дробь въ 100 разъ.

Итакъ, **зачеркнуть запятую въ десятичной дроби значитъ увеличить ее во столько разъ, сколько единицъ въ ея знаменателѣ.**

Какъ измѣнится величина десятичной дроби, если перенести въ ней запятую влѣво черезъ одну, двѣ, три и т. д. цифръ? По предыдущему § легко сообразить, что **перенести запятую влѣво черезъ одну цифру значитъ уменьшить десятичную дробь въ 10 разъ;** перенести **черезъ двѣ цифры** значитъ **уменьшить въ 100 разъ; черезъ три—въ 1000 разъ** и т. д.

Для примѣра возьмемъ десятичную дробь 25,8; переставивъ въ ней запятую влѣво черезъ одну цифру, получимъ 2,58. Сравнивая по разрядамъ данную дробь съ по-

Digitized by Google

лученной, нетрудно убѣдиться, что полученная дробь въ 10 разъ меньше данной. Наоборотъ, чтобы уменьшить десятичную дробь въ 10, въ 100, въ 1000 и т. д. разъ, достаточно перенести запятую влѣво черезъ одну, двѣ, три и т. д. цифръ. Вообще, **чтобы раздѣлить десятичную дробь на 1-цу съ однимъ или нѣсколькими нулями, достаточно перенести запятую влѣво черезъ столько цифръ, сколько нулей въ дѣлителѣ; если же десятичныхъ знаковъ недостаетъ,** т.-е. если надобно перенести запятую, напр., черезъ три цифры, а ихъ всего одна, **то тогда дополняютъ число ихъ нулями, приписывая слѣва.** Напр.: 1) $358{,}04 : 100 = 3{,}5804$; 2) $231{,}945 : 1000 = 0{,}231945$; 3) $7{,}5 : 1000 = 0{,}0075$; 4) $0{,}9 : 100 = 0{,}009$.

Замѣчаніе. Чтобы уменьшить какое-либо цѣлое число, въ 10, въ 100, въ 1000 и т. д. разъ, достаточно отдѣлить съ правой стороны его одну, двѣ, три и т. д. цифръ. Напр.: $473 : 10 = 47{,}3$; $5008 : 1000 = 5{,}008$.

Четыре дѣйствія надъ десятичными дробями.

§ 21. Сложеніе.

При сложеніи десятичныхъ чиселъ нужно поступать такъ же, какъ и при сложеніи цѣлыхъ чиселъ, **подписывая одинаковыя доли одна подъ другой.**

Пусть, напр., дано сложить дроби:

$$12{,}0062 + 5{,}483 + 40{,}67 + 0{,}3845.$$

Пишемъ, данныя дроби одну подъ другой **такъ, чтобы цѣлыя приходились подъ цѣлыми, десятыя доли подъ десятыми, сотыя подъ сотыми,** тысячныя подъ тысячными и десятитысячныя подъ десятитысячными. Подписавъ такимъ образомъ, проводимъ **черту** и ставимъ **знакъ** $+$. Въ изображеніи получимъ:

$$\begin{array}{r} 12{,}0062 \\ 5{,}483 \\ + \quad 40{,}67 \\ 0{,}3845 \\ \hline \end{array}$$

Digitized by Google

Теперь производимъ самое сложеніе, начиная съ наименьшихъ долей единицы.

Низшія доли — десятитысячныя, ихъ сумма $(2+5)=7$; ставимъ эту цифру подъ чертою противъ тѣхъ же долей, т.-е. десятитысячныхъ.

Слѣдующія доли—тысячныя; ихъ сумма $(6+3+4)=13$; но такъ какъ 13 тысячныхъ составляютъ 1 сотую и 3 тысячныхъ, то поэтому цифру 3 ставимъ подъ чертою противъ тысячныхъ долей, а 1 сотую относимъ къ сотымъ долямъ.

Далѣе, сумма сотыхъ долей $(1+0+8+7+8)=24$; цифру 4 ставимъ подъ чертой противъ сотыхъ долей, а 20 сотыхъ, какъ составляющихъ 2 десятыхъ относимъ къ десятымъ долямъ.

Затѣмъ, сумма десятыхъ долей $(2+0+4+6+3)=15$; цифру 5 ставимъ подъ чертою противъ десятыхъ долей, а 10 десятыхъ, какъ составляющихъ цѣлую 1-цу относимъ къ единицамъ.

Замѣчаніе. Окончивъ сложеніе десятичныхъ долей, **необходимо поставить** передъ полученными цифрами **запятую.**

Наконецъ складываемъ цѣлыя числа: сумма единицъ $=8$; сумма десятковъ $=5$. Итакъ:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 21} \\ 12{,}0062 \\ +\ 5{,}483 \\ 40{,}67 \\ 0{,}3845, \\ \hline \end{array}$$

Искомая сумма $=58{,}5437$.

§ 22. Вычитаніе.

При вычитаніи десятичныхъ чиселъ нужно поступать такъ же, какъ и при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ, **подписывая одинаковыя доли одна подъ другой.**

Пусть, напр., дано изъ 5,32 вычесть 4,096.

Пишемъ сначала уменьшаемое, а потомъ **подъ уменьшаемымъ подписываемъ вычитаемое такъ, чтобы цѣлое приходилось подъ цѣлымъ, десятыя доли подъ десятыми,** сотыя подъ сотыми и тысячныя подъ тысячными; при этомъ для ясности число десятичныхъ знаковъ можно уравнять нулями. Въ изображеніи получимъ:

$$\begin{array}{r} 5{,}320 \\ -\ 4{,}096 \\ \hline \end{array}$$

Digitized by Google

Теперь производимъ самое дѣйствіе вычитанія, начиная съ наименьшихъ долей.

Вычитаемъ тысячныя доли: 6 тысячныхъ изъ 0 тысячныхъ вычесть нельзя; занимаемъ у 2-хъ сотыхъ 1 сотую; 1 сотая=10 тысячнымъ; вычитая 6 изъ 10, получимъ 4 тысячныхъ, которыя и пишемъ въ разности подъ чертой противъ же тысячныхъ.

Далѣе, **вычитаемъ сотыя доли;** 9 сотыхъ изъ 2 сотыхъ не вычитаются занимаемъ 1 десятую; эта доля=10 сотымъ; прибавивъ къ этому 2 сотыхъ, получимъ 12 сотыхъ; вычитая 9 изъ 12, получимъ 3 сотыхъ, которыя и пишемъ въ разности подъ сотыми долями и т. д. Окончивъ вычитаніе десятичныхъ долей, необходимо поставить передъ полученными цифрами **запятую;** послѣ же вычитаемъ цѣлыя единицы. Итакъ:

```
  . .
  5,320
— 4,096
  1,234
```

Искомая разность

Возьмемъ еще примѣръ: изъ 8,2 вычесть 5,648.

Пишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

```
  . .
  8,2
— 5,648
  2,552.
```

§ 23. Умноженіе.

Умноженіе десятичныхъ дробей производится точно такъ же, какъ и умноженіе цѣлыхъ чиселъ.

Пусть, напр., дано умножить 8,35 на 2,4.

Пишемъ множимое и подъ множимымъ, не обращая вниманія на запятыя, **подписываемъ множителя такъ, какъ будто даны цѣлыя числа;** далѣе проводимъ **черту** и ставимъ **знакъ** $\times$. Въ изображеніи получимъ:

```
  8,35
× 2,4
```

Самое дѣйствіе умноженія состоитъ въ слѣдующемъ: **отбрасываютъ на время во множимомъ и во множителѣ запятыя и перемножаютъ данныя дроби, какъ цѣлыя числа,** т.-е. какъ 835 на 24; **въ полученномъ же произведеніи**

Digitized by Google

20040 **отдѣляютъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ было отброшено во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.** Такимъ образомъ получится 20,040 или же по сокращеніи—20,04. Итакъ:

$$\begin{array}{r} 8,35 \\ \times\ 2,4 \\ \hline 3340 \\ 1670 \\ \hline 20,04. \end{array}$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности полученнаго произведенія, **приведемъ слѣдующее доказательство.**

Если обратимъ данныя десятичныя дроби въ обыкновенныя, то будемъ имѣть

$$^{835}/_{100} \times {}^{24}/_{10}, \text{ что} = \frac{835 \cdot 24}{100 \cdot 10} \text{ или же} = \frac{20040}{1000}.$$

Представивъ же полученное дробное произведеніе въ десятичномъ видѣ, найдемъ, что $\frac{20040}{1000} = 20,040$ или же $=$ $= 20,04$; что и требовалось доказать.

Правило: чтобы умножить десятичную дробь на десятичную, достаточно, не обращая вниманія на запятыя, перемножить ихъ, какъ цѣлыя числа, и въ произведеніи отдѣлить запятою справа столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ есть во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ; если же въ произведеніи знаковъ недостанетъ, то необходимо дополнить число ихъ нулями, приписавъ слѣва.

Разсуждая, согласно выведенному правилу, найдемъ, что

$$0,267 \times 0,3 = 0,0801;$$
$$0,1349 \times 5 = 0,6745.$$

Замѣчаніе. Если одинъ изъ сомножителей десятичныхъ дробей $=$ **0,1** или **0,01** или же **0,001** и т. д., то въ этомъ случаѣ **перемножаются дроби** обыкновенно **при помощи перенесенія въ другомъ сомножителѣ запятой влѣво** черезъ одну, двѣ, три и т. д. цифръ Пусть, напр., дано умножить 42,35 на 0,1. Умножить на 0,1 значитъ найти десятую часть даннаго множимаго; а для этого надо множимое уменьшить въ 10 разъ; но чтобы уменьшить 42,35 въ 10 разъ, достаточно перенести запятую влѣво черезъ одну цифру; слѣд.,

$$42,35 \times 0,1 = 4,235.$$

Digitized by Google

Еще примѣръ: умножить 0,01 на 43,9.

Такъ какъ при перестановкѣ сомножителей произведеніе по величинѣ не измѣняется, то

$0{,}01 \times 43{,}9 = 43{,}9 \times 0{,}01$; а это равно 0,439.

§ 24. Дѣленіе.

При дѣленіи десятичныхъ дробей могутъ встрѣтиться два случая: 1) **когда дѣлитель—цѣлое число** и 2) **когда дѣлитель**—десятичная дробь.

Пусть, напр., дано 34,68 раздѣлить на 4.

Расположимъ самое дѣйствіе такъ, какъ оно обыкновенно располагается при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ, т.-е. 34,68 | 4 .

Дѣлимъ сначала цѣлую часть дѣлимаго: дѣля 34 на 4, получимъ въ частномъ 8 цѣлыхъ единицъ и остатокъ 2; 8 единицъ отдѣляемъ запятой —

$$\begin{array}{r|l} 34{,}68 & 4 \\ \cline{2-2} -\,32 & 8, \\ \cline{1-1} \text{»}2 & \end{array}$$

Теперь **дѣлимъ десятыя доли дѣлимаго:** для этого обращаемъ оставшіяся 2 единицы въ десятыя доли и прибавляемъ къ нимъ 6 десятыхъ дѣлимаго, — итого будетъ 26 десятыхъ; дѣля ихъ на 4, получимъ въ частномъ 6 десятыхъ и остатокъ 2—

$$\begin{array}{r|l} 34{,}68 & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 8{,}6 \\ \cline{1-1} \text{»}26 & \\ 24 & \\ \cline{1-1} \text{»}2 & \end{array}$$

Затѣмъ **дѣлимъ сотыя доли дѣлимаго:** для этого обращаемъ оставшіяся 2 десятыхъ въ сотыя доли и сносимъ къ нимъ 8 сотыхъ дѣлимаго, — итого будетъ 28 сотыхъ; дѣля ихъ на 4, получимъ въ частномъ 7, въ остаткѣ же 0—

$$\begin{array}{r|l} 34{,}68 & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 8{,}67. \\ \cline{1-1} \text{»}26 & \\ 24 & \\ \cline{1-1} \text{»}28 & \\ 28 & \\ \cline{1-1} \text{»»} & \end{array}$$

Слѣд., $34{,}68 : 4 = 8{,}67$.

Digitized by Google

2-й примѣръ. Дано раздѣлить 17,375 на 25.

Отъ дѣленія 17 единицъ на 25, въ частномъ цѣлыхъ единицъ не получится; поэтому ставимъ на мѣстѣ цѣлыхъ 0 и отдѣляемъ его запятой. Обращаемъ 17 единицъ въ десятыя доли, придаемъ къ нимъ 3 десятыхъ дѣлимаго и дѣлимъ 173 десятыхъ на 25 и т. д.—разсуждаемъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ.

Точно такимъ же образомъ поступаютъ и **при дѣленіи цѣлаго числа на цѣлое,** когда дѣленіе не можетъ быть выполнено въ цѣлыхъ числахъ.

Напр.: 50 : 8 =

—	50	8
	48	6,25
	»20	
—	16	
	»40	
—	40	
	»»	

Итакъ, **чтобы раздѣлить десятичную дробь на цѣлое, надо послѣдовательно дѣлить на данное число сперва цѣлую часть дроби,** потомъ **десятыя доли,** затѣмъ — **сотыя** и т. д., поступая по правилу дѣленія цѣлыхъ чиселъ; **въ частномъ же цѣлое число необходимо отдѣлить отъ десятичныхъ долей запятою.** Если въ дѣлимомъ **цѣлое число меньше дѣлителя** или **совсѣмъ его нѣтъ,** то тогда **въ частномъ на мѣстѣ цѣлаго пишутъ 0** и отдѣляютъ его **запятой.**

Дѣленіе на десятичную дробь. Дѣленіе десятичной дроби на десятичную приводится къ дѣленію на цѣлое число.

Пусть, напр., дано раздѣлить 5,046 на 2,4.

Если въ дѣлителѣ отбросимъ запятую, а въ дѣлимомъ перенесемъ запятую вправо черезъ одну цифру, то дѣлимое и дѣлитель одновременно увеличатся въ 10 разъ; частное же отъ этого, какъ намъ извѣстно, не измѣнится; такимъ образомъ 5,046 : 2,4 = 50,46 : 24. Дѣля по вышеизложенному правилу 50,46 на цѣлое число 24, найдемъ, что

50,46 : 24 = 2,1025.

2-й примѣръ: 1,0778 : 0,425; отбрасывая запятую въ дѣлителѣ и перенося запятую черезъ три цифры въ дѣлимомъ, найдемъ, что

1,0778 : 0,425 = 1077,8 : 425, а это = 2,536.

Digitized by Google

3-й примѣръ: $0{,}08246 : 0{,}38 = 8{,}246 : 38 = 0{,}217$.

Итакъ, **чтобы раздѣлить десятичную дробь на десятичную, надо въ дѣлителѣ отбросить запятую, а дѣлимое, при помощи перенесенія запятой вправо, увеличить во столько разъ, во сколько увеличили дѣлителя, отбрасывая запятую; затѣмъ поступать такъ же, какъ и при дѣленіи на цѣлое число.**

По этому же правилу производится **дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь.** Пусть, напр., дано 9 раздѣлить на 0,24.

Отбрасывая запятую въ дѣлителѣ, а дѣлимое увеличивая въ 100 разъ, найдемъ, что $9 : 0{,}24 = 900 : 24$, а это $= 37{,}5$.

2-й примѣръ; $17 : 0{,}125 = 17000 : 125$, а это $= 136$.

3-й примѣръ: $8 : 0{,}0625 = 80000 : 625$, а это $= 128$.

Замѣчаніе. Чтобы **раздѣлить** какую-либо **десятичную дробь** на **0,1** или на **0,01** или на **0,001** и т. д., **достаточно въ дѣлимомъ перенести запятую вправо** черезъ одну, двѣ, три и т. д. цифръ. Пусть, напр., дано раздѣлить 8,375 на 0,01.

Раздѣлить 8,375 на 0,01 значитъ найти такое частное, сотая часть котораго $= 8{,}375$; отсюда, чтобы найти это частное, то надо 8,375 умножить на 100 или увеличить въ 100 разъ; чтобы это сдѣлать, достаточно въ дѣлимомъ перенести запятую вправо черезъ двѣ цифры.

Итакъ, $8{,}375 : 0{,}01 = 8{,}375 \times 100$, а это $= 837{,}5$.

Точно такъ же найдемъ, что

$0{,}64 : 0{,}1 = 0{,}64 \times 10$, а это $= 6{,}4$;

$5{,}4836 : 0{,}001 = 5{,}4836 \times 1000$, а это $= 5483{,}6$.

§ 25. Приближенное частное.

При отысканіи частнаго въ видѣ десятичной дроби нерѣдко приходится ограничиваться въ немъ лишь нѣсколькими первыми десятичными знаками, отбрасывая остальные; въ такомъ случаѣ взятое частное называется **приближеннымъ.** Если приближенное частное разнится отъ истиннаго частнаго меньше, чѣмъ на 0,1, или на 0,01

Digitized by Google

и т. д., то въ этомъ случаѣ обыкновенно говорятъ, что **приближенное частное взято съ точностью до 0,1 или до 0,01** и т. д.

Пусть, напр., дано раздѣлить 25,37 на 16, при чемъ требуется найти частное данныхъ чиселъ съ точностью до 0,01.

Дѣлимъ:

25,37	16	
16	1,58	
»93		
80		
137		
128		
»»9		

Ограничившись въ частномъ сотыми долями, прекращаемъ дѣленіе. **Найденное число 1,58 будетъ называться приближеннымъ частнымъ.** Если бы мы продолжили дѣленіе, то въ частномъ получили бы еще тысячныя, десятитысячныя и т. д. доли, но мы ихъ отбрасываемъ, и поэтому всякое приближенное частное, какъ мы видимъ, должно быть **меньше истиннаго частнаго.** Но такъ какъ въ приближенномъ частномъ недостающія доли не составляютъ даже одной сотой, то отсюда заключаемъ, что **оно разнится отъ истиннаго частнаго меньше, чѣмъ на 0,01.** На основаніи этого можно сказать, что приближенное частное взято съ точностью до 0,01, Если же послѣднюю цифру найденнаго приближеннаго частнаго увеличимъ на единицу, то получимъ **другое приближенное частное, равное 1,59;** это частное будетъ уже **болѣе истиннаго частнаго,** хотя также съ точностью до 0,01, такъ какъ превышающія въ немъ доли не больше одной сотой.

Если взятое приближенное частное менѣе истиннаго, то въ этомъ случаѣ говорятъ, что частное взято **съ недостаткомъ** (такъ какъ нѣкоторыхъ долей не добрали), если же взятое приближенное частное болѣе истиннаго, то тогда говорятъ, что частное взято **съ избыткомъ** (такъ какъ нѣсколько долей взято лишнихъ).

Въ указанномъ нами примѣрѣ 1-е частное 1,58 взято съ недостаткомъ, второе же 1.59—съ избыткомъ.

Digitized by Google

Изъ двухъ найденныхъ приближенныхъ частныхъ обыкновенно выбираютъ то, которое ближе подходитъ къ истинному частному. Въ нашемъ примѣрѣ истинное частное можно обозначить такъ: $1{,}58 + {}^{9}/_{16}$ сотой; сравнивая съ нимъ то и другое изъ приближенныхъ частныхъ, найдемъ, что первое приближенное частное 1,58 разнится отъ истиннаго на $^{9}/_{16}$ сотой, или болѣе, чѣмъ на $^{1}/_{2}$ сотой; второе же приближенное частое 1,59 разнится отъ истиннаго на $^{7}/_{16}$ сотой или менѣе, чѣмъ на $^{1}/_{2}$ сотой; отсюда заключаемъ, что приближенное частное съ избыткомъ ближе подходитъ къ истинному, чѣмъ частное съ недостаткомъ; слѣд., и выбрать надо въ данномъ случаѣ второе приближенное частное 1,59.

Разсуждая подобнымъ образомъ, можно вычислить приближенное частное съ какою угодно степенью точности.

Случай безконечнаго дѣленія. При отыскиваніи частнаго въ видѣ десятичной дроби можетъ встрѣтиться такой случай, что, производя дѣленіе одного числа на другое, мы никогда не дойдемъ до остатка 0 и такимъ образомъ дѣленіе никогда не окончимъ. Чтобы показать это наглядно, возьмемъ слѣдующіе примѣры: 1) 7,39 : 4; 2) 52 : 15; 3) 110 : 42.

1) 7,39 | 4	2) 52 | 15	3) 110 | 42
33 1,8475	70 3,466...	0,26190442....
19	100	
30	100 и т. д.	
20		
0		

Разсматривая указанные примѣры, мы видимъ, что **въ 1-мъ случаѣ дѣленіе кончается**, такъ какъ въ остаткѣ получили 0; **частное** же отъ этого дѣленія **получилось**, какъ говорятъ, **точное** или **конечное. Во второмъ же и третьемъ случаяхъ, сколько бы мы ни продолжали дѣленіе, оно никогда не окончится; частное** при этомъ дѣленіи **получается**, какъ говорятъ, **неточное** или **безконечное.**

§ 26. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя. Дробь есть частное отъ дѣленія числителя на знаменателя; поэтому обратить обыкновенную дробь въ десятичную значитъ выразить это частное въ десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ и т. д. доляхъ единицы.

Digitized by Google

Примѣръ 1-й. Обратить дробь $^5/_8$ въ десятичную.

Дробь $^5/_8$ равна 5 : 8; производя дѣленіе 5-ти на 8 по правилу дѣленія десятичныхъ дробей, т.-е.

```
 50 | 8
48  | 0,625
»20
 16
 »40
  40
  »»
```

получимъ въ частномъ 0,625; это частное представляетъ собою десятичную дробь точную или конечную; слѣд., $0{,}625 = {}^5/_8$.

Правило: **чтобы обратить простую дробь въ десятичную, достаточно числителя раздѣлить на знаменателя, какъ дѣлятся цѣлыя числа, когда желаютъ получить частное въ видѣ десятичной дроби.**

Примѣръ 2-й. Обратить дробь $^{35}/_6$ въ десятичную.

Дробь $^{35}/_6$ равна 35 : 6; производимъ подобно предыдущему дѣленіе:

```
35 | 6
30 | 5,833...
»50
 48
 »20
  18
  »20
   18
   »2 и т. д.
```

Получивъ четвертый остатокъ 2, мы замѣчаемъ, что, начиная съ сотыхъ долей, получающіеся остатки (2), а равно какъ соотвѣтствующія имъ цифры въ частномъ (3) повторяются; отсюда заключаемъ, что дѣленіе въ данномъ примѣрѣ никогда не можетъ окончиться. Прекративъ по этому случаю дѣленіе на 4-мъ остаткѣ, мы получаемъ въ частномъ 5,833... (5 цѣлыхъ 8 десятыхъ 3 сотыхъ 3 тысячныхъ и т. д.; многоточіе означаетъ безконечное повтореніе цифры 3). **Полученное частное представляетъ собою десятичную дробь неточную или безконечную;** эту **безконечную дробь** (5,83333.....)

Digitized by Google

можно принять за истинную величину данной дроби $^{35}/_{6}$, такъ какъ **разность между ними** ($^{35}/_{6}$—5,833.....) **меньше всякой произвольно малой десятичной доли единицы.**

Точно такъ же найдемъ, что

$^{2}/_{3}$ по обращеніи въ десятичную дробь = 0,66....
$^{3}/_{11}$ = 0,2727.....
$^{16}/_{37}$ = 0,432432...
$^{35}/_{36}$ = 0,9722...
$^{13}/_{44}$ = 0,295454....
$^{4}/_{21}$ = 0,190476190476....

Итакъ, отъ обращенія обыкновенныхъ дробей въ десятичныя могутъ получаться дроби двухъ родовъ: **точныя или конечныя,** и **неточныя или безконечныя. Точныя дроби** получаются при точномъ дѣленіи; точными онѣ называются потому, что онѣ **совершенно точно равны обращаемой простой дроби. Неточныя,** или безконечныя дроби получаются при неточномъ, или безконечномъ дѣленіи; такія дроби только **приблизительно равны обращаемой простой дроби.**

---

§ 27. Періодическія дроби.

Безконечная десятичная дробь, въ которой одинъ или нѣсколько десятичныхъ знаковъ безконечно повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ, называется **періодической,** а повторяющіеся десятичные знаки называются **періодомъ.** Такъ, напр., 7,444... и 0,83535.... будутъ дроби періодическія съ періодами: въ первомъ случаѣ 4 и во второмъ 35.

Если въ безконечной дроби періодъ начинается съ первой цифры послѣ запятой, то такая безконечная дробь называется **чистою періодическою.** Напр.: 5,66.... и 0,2727... дроби чисто-періодическія и читаются такъ: 1) 5 цѣлыхъ 6 въ періодѣ и 2) 0 цѣлыхъ 27 въ періодѣ. Если же въ безконечной дроби **періодъ начинается спустя нѣсколько цифръ послѣ запятой,** то такая безконечная дробь называется **смѣшанною періодическою.** Напр.: 0,9722... и 0,295454....—дроби **смѣшанно-періодическія и читаются такъ:** 1) 0 цѣлыхъ 97 сотыхъ 2 въ періодѣ и 2) 0 цѣлыхъ 29 сотыхъ 54 въ періодѣ.

Digitized by Google

Замѣчаніе. До сего времени безконечныя дроби отмѣчались **многоточіемъ**, поставленнымъ послѣ нѣсколько разъ повтореннаго десятичнаго знака; **для краткости** же таковыя дроби **удобнѣе отмѣчать при помощи скобокъ**, заключая въ нихъ періодъ, написанный одинъ только разъ. Такъ, упомянутыя выше безконечныя дроби: 5,66....., 0,295454....., 0,432432....., 0,190476190476..... можно записать [1]) 5,(6), [2]) 0,29(54), [3]) 0,(432), [4]) 0,(190476).

§ 28. Другой способъ обращенія простыхъ дробей въ десятичныя. Обратить обыкновенную дробь въ десятичную значитъ привести ее къ знаменателю, который изображается 1-цею съ нулями, или, другими словами, который содержитъ въ себѣ по равному числу только множителей 2 и 5. Отсюда, обратить, напр., несократимую дробь (иначе надо ее сократить) $^9/_{40}$ въ десятичную — значитъ замѣнить ее такою равною ей дробью, знаменатель которой содержалъ бы только множителей 2 и 5 и притомъ поровну. Чтобы это сдѣлать, достаточно уравнять число двоекъ и пятерокъ въ разложеніи знаменателя данной дроби. Такъ какъ $40 = 2.2.2.5$, то, добавивъ къ этимъ множителямъ два раза множитель 5, т.-е. умноживъ 40 на 25, получимъ 1000 — искомаго знаменателя десятичной дроби; въ составъ этого знаменателя входятъ по равному числу (по 3 раза) множители 2 и 5.

Чтобы дробь $^9/_{40}$ не измѣнила своей величины, надо и къ числителю ея добавить два раза множитель 5, т.-е. надо 9 умножить на 25. Итакъ,

$$^9/_{40} = \frac{9}{2.2.2.5} = \frac{9.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{225}{1000},$$ а это равно 0,225.

Возьмемъ еще нѣсколько примѣровъ:

1) $^3/_8 = \frac{3}{2.2.2} = \frac{3.5.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{375}{1000} = 0{,}375.$

2) $^7/_{25} = \frac{7}{5.5.5} = \frac{7.2.2.2}{5.5.5.2.2.2} = \frac{56}{1000} = 0{,}056.$

3) $\frac{63}{350}$ по сокращеніи на $7 = {}^9/_{50} = \frac{9}{2.5.5} = \frac{9.2}{2.5.5.2} =$

$= \frac{18}{100} = 0{,}18.$

Digitized by Google

Изъ указанныхъ примѣровъ видно, что **если въ составъ знаменателя обыкновенной несократимой дроби входятъ множители только 2 и 5, вмѣстѣ или отдѣльно, то такая простая дробь обращается въ точную десятичную; при этомъ число десятичныхъ знаковъ опредѣляется въ ней тѣмъ изъ упомянутыхъ множителей, который повторяется въ знаменателѣ данной простой дроби большее число разъ** (напр., десятичная дробь, получаемая отъ обращенія $^7/_{80}$, должна имѣть 4 десятичныхъ знака, такъ какъ въ составѣ знаменателя простой дроби (80) входятъ 4 двойки, а пятерка — одинъ только разъ).

§ 29. Какія простыя дроби не могутъ обратиться въ десятичныя точныя или конечныя? Если въ составъ знаменателя простой несократимой дроби **множители 2 и 5 совсѣмъ не входятъ или же входятъ съ иными первоначальными множителями,** то такую простую дробь въ точную десятичную обратить никакъ нельзя. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., дано несократимую простую дробь $^7/_{12}$ обратить въ точную десятичную. Разложивъ по предыдущему ея знаменателя, мы видимъ,

$$^7/_{12} = \frac{7}{2.2.3},$$

что никакими преобразованіями нельзя достигнуть того, чтобы получить въ знаменателѣ 1-цу съ нулями; поэтому дробь $^7/_{12}$ нѣтъ никакой возможности точно выразить въ видѣ десятичной точной дроби. Точно такъ же не обращаются въ точныя десятичныя дроби, напр.: $^8/_{15}$, $^3/_7$, $^9/_{35}$, $^7/_{60}$ и т. п. Такія дроби обыкновенно обращаются въ безконечныя.

Всякая безконечная дробь, получаемая отъ обращенія обыкновенной, должна быть періодической. Пусть, напр., желаемъ мы обратить въ десятичную дробь $^4/_7$.

Такъ какъ знаменатель данной несократимой дроби 7 не составленъ изъ множителей 2-хъ и 5-ти, то ясно, что эта дробь не можетъ обратиться въ конечную десятичную. Она, на основаніи предыдущаго, обращается въ безконечную десятичную. Производимъ дѣленіе 4 на 7 (см.).

Digitized by Google

40 | 7
50 0,5714285....
10
30
20
60
40 и т. д.

Такъ какъ дѣленіе въ данномъ случаѣ не можетъ окончиться, то всевозможныхъ остатковъ должно быть безконечно много. Но такъ какъ получаемые при дѣленіи остатки всегда меньше дѣлителя, то поэтому число **различныхъ** остатковъ должно быть ограниченнымъ, т.-е. въ данномъ случаѣ ихъ не можетъ быть больше 6-ти слѣдующихъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Отсюда слѣдуетъ, что **при достаточномъ продолженіи дѣленія одинъ изъ остатковъ долженъ повториться** (см. 7-й остатокъ); **если же повторился одинъ остатокъ, то должна повториться и соотвѣтствующая цифра частнаго, а за нею и слѣдующій остатокъ** и т. д.

Такимъ образомъ, всѣ остатки и всѣ цифры частнаго, начиная съ разсматриваемыхъ, должны повторяться въ томъ же порядкѣ, въ какомъ они шли раньше, **а потому безконечная дробь должна быть періодической.**

Какія простыя дроби обращаются въ чисто-періодическія? Тѣ простыя несократимыя дроби, знаменатели которыхъ **совсѣмъ не содержатъ множителей 2 и 5,** обращаются всегда въ чисто-періодическія.

Такъ, напр.: $^2/_3 = 0,(6)$; $^2/_9 = 0,(2)$; $^5/_{11} = 0,(45)$; $^4/_{11} = 0,(36)$ и т. п.

Какія простыя дроби обращаются въ смѣшанно-періодическія? Тѣ простыя несократимыя дроби, знаменатели которыхъ **содержатъ, кромѣ 2 и 5, еще и другихъ первоначальныхъ множителей,** обращаются всегда въ смѣшанно-періодическія; при этомъ число десятичныхъ знаковъ до періода опредѣляются тѣмъ изъ множителей 2 или 5, который въ знаменателѣ данной простой дроби повторяется большее число разъ.

Возьмемъ для примѣра дробь $^7/_{60}$. Разложивъ знаменателя этой дроби на первоначальныхъ множителей, полу-

Digitized by Google

чимъ: $60 = 2.2.3.5$. При составѣ такихъ множителей въ знаменателѣ данная дробь должна обратиться въ смѣшанную періодическую съ двумя цифрами до періода. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ числителя и знаменателя нашей дроби на 5, получимъ:

$$^7/_{60} = \frac{7.5}{2.2.3.5.5} = \frac{35}{3.100}$$ или же равно $^{35}/_3 : 100$.

Но такъ какъ $^{35}/_3$ обращается въ дробь чисто-періодическую, т.-е. $^{35}/_3 = 11,(6)$, то $^7/_{60}$ въ такомъ случаѣ будетъ $= 11,(6) : 100$, т.-е. $^7/_{60} = 0,11(6)$.

Точно такъ же найдемъ, что $^5/_6 = 0,8(3)$; $^{53}/_{132} = 0,32(57)$ и т. п.

Замѣчаніе. **Необходимо обратить особое вниманіе на тѣ чисто-періодическія дроби, которыя получаются отъ обращенія слѣдующихъ простыхъ дробей:** $^1/_9$, $^1/_{99}$, $^1/_{999}$ и т. д.

Такъ, $^1/_9 = 0,(1)$; $^1/_{99} = 0,(01)$; $^1/_{999} = 0,(001)$ и т. д.

Нетрудно видѣть, что періодъ каждой изъ этихъ дробей содержитъ столько цифръ, сколько ихъ въ знаменателѣ соотвѣтствующей простой дроби; при чемъ послѣдняя цифра періода будетъ всегда 1-ца, а остальныя — нули.

Эти **основныя дроби:** 0,(1); 0,(01); 0,(001) и т. д. **надо всегда помнить и знать, какимъ простымъ дробямъ онѣ равняются,** такъ какъ впослѣдствіи съ ними придется сравнивать всякія чисто-періодическія дроби.

---

§ 30. Обращеніе періодическихъ дробей въ простыя.

Какъ обращаются чистыя періодическія дроби въ простыя? Пользуясь предыдущимъ замѣчаніемъ, нетрудно обратить любую чистую періодическую дробь въ простую. Пусть, напр., дано обратить въ обыкновенную дробь 0,(24).

Данную дробь 0,(24) можно разсматривать какъ дробь 0,(01), повторенную 24 раза; слѣд., $0,(24) = 0,(01) \times 24$. Но такъ какъ 0,(01) обращается, какъ мы знаемъ, въ $^1/_{99}$, то отсюда ясно,

Digitized by Google

что 0,(24) должно обратиться въ дробь, большую $^1/_{99}$ въ 24 раза, т.-е. въ $^1/_{99} \times 24$, что равно $^{24}/_{99}$, или же по сокращеніи $= {}^8/_{33}$.

Точно такъ же найдемъ, что

1) $0,(6) = 0,(1) \times 6 = {}^1/_9 \times 6 = {}^6/_9 = {}^2/_3$.

2) $0,(045) = 0,(001) \times 45 = {}^1/_{999} \times 45 = {}^{45}/_{999} = {}^5/_{111}$.

3) $4,(85) = 4 + 0,(85)$; но $0,(85) = 0,(01) \times 85 = {}^{85}/_{99}$; слѣд., $4,(75) = 4{}^{85}/_{99}$.

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ можно вывести слѣдующее правило: **чтобы обратить чистую періодическую дробь въ простую, достаточно числителемъ поставить періодъ, а знаменателемъ написать цифру 9 столько разъ, сколько цифръ въ періодѣ, и, если можно, сократить.**

Примѣры: $0,(35) = \frac{35}{99}$; $0,(047) = \frac{47}{999}$; $4,(3) = 4{}^1/_3$ и т. п.

Замѣчаніе. Разсматривая простыя дроби, получаемыя отъ обращенія чистыхъ періодическихъ дробей, мы замѣчаемъ, что чистая періодическая дробь всегда приводится къ такой несократимой простой дроби, знаменатель которой не содержитъ множителей 2 и 5. Отсюда слѣдуетъ (обратно), что **въ чисто-періодическія дроби обращаются только тѣ изъ простыхъ дробей, въ составъ знаменателей которыхъ совсѣмъ не входятъ множители 2 и 5.**

Какъ обращаются смѣшанныя періодическія дроби въ простыя? Обращеніе смѣшанныхъ періодическихъ дробей въ простыя можно привести къ обращенію чисто-періодическихъ дробей въ простыя. Для этого надо сдѣлать:

во-первыхъ, **перенести въ данной дроби запятую до періода;**

во-вторыхъ, **полученную такимъ образомъ чисто-періодическую дробь обратить въ простую и,**

въ-третьихъ, **уменьшить послѣднюю во столько же разъ, во сколько была увеличена данная дробь при перенесеніи въ ней запятой вправо—до періода.**

Дана смѣшанная періодическая дробь 0,15(34); требуется обратить ее въ простую.

Digitized by Google

Перенеся въ данной дроби запятую вправо до періода, получимъ 15,(34); эта чисто-періодическая дробь по обращеніи въ простую будетъ $= 15^{34}/_{99}$. Уменьшивъ же это послѣднее число въ 100 разъ, найдемъ, что

$$0,\ 15(34) = 15\frac{34}{99} : 100.$$

Остается теперь для полученія простой дроби отъ обращенія данной смѣшанной $15^{34}/_{99}$ раздѣлить на 100. Чтобы произвести это дѣленіе, обращаемъ сначала $15^{34}/_{99}$ въ неправильную дробь. (Замѣтимъ, что вычисленія при обращеніи въ неправильныя дроби дробныхъ чиселъ со знаменателями 9, 99, 999 и т. д. обыкновенно упрощаются). Въ данномъ случаѣ для полученія числителя искомой неправильной дроби поступаемъ такъ: умножаемъ 15 на 100, отнимаемъ затѣмъ отъ полученнаго произведенія лишній разъ взятые 15 и прибавляемъ 34; такимъ образомъ числитель искомой дроби будетъ равенъ $1500 - 15 + 34$, или же $= 1534 - 15$ (15 пока вычитать не будемъ). Подписавъ же теперь подъ этимъ числителемъ знаменателя 99, найдемъ, что

$$15\frac{34}{99} = \frac{1534 - 15}{99}.$$

Чтобы раздѣлить эту неправильную дробь на 100, достаточно приписать къ ея знаменателю 2 нуля, получимъ $\frac{1534 - 15}{9900}$.

Итакъ, 0,15(34) или же 0,153434..... $= \frac{1534 - 15}{9900}$.

Замѣчаніе. Разсматривая числителя найденной простой дроби по отношенію къ данной смѣшанной, мы замѣчаемъ, что 1534 есть число, стоящее между запятой и началомъ 2-го періода; 15 же есть число, стоящее между запятой и началомъ 1-го періода.

Что же касается знаменателя, то мы видимъ, что въ немъ девятокъ столько, сколько цифръ въ періодѣ, а нулей столько, сколько цифръ послѣ запятой до 1-го періода.

Digitized by Google

На основаніи этого замѣчанія выводимъ слѣдующее правило **быстраго и легкаго обращенія** смѣшанной періодической дроби въ простую:

Чтобы смѣшанную періодическую дробь обратить въ простую, достаточно изъ числа, стоящаго между запятой и началомъ 2-го періода, вычесть число, стоящее между запятой и началомъ 1-го періода, и полученную разность взять числителемъ, а знаменателемъ написать цифру 9 столько разъ, сколько цифръ въ періодѣ, и со столькими нулями, сколько цифръ послѣ запятой до 1-го періода; полученную же дробь, если можно, сократить.

Въ данномъ случаѣ $0,15(34) = \frac{1534-15}{9900} = \frac{1519}{9900}$ (дробь несократимая).

Возьмемъ еще нѣсколько примѣровъ:

1) $0,62121.... = 0,6(21) = \frac{621-6}{990} = \frac{615}{990} = \frac{41}{66}$.

2) $0,8333.... = 0,8(3) = \frac{83-8}{90} = {}^{75}/_{90} = {}^{5}/_{6}$.

3) $0,195370370... = 0,195(370) = \frac{195370-195}{999000} = \frac{195175}{999000} = \frac{211}{1080}$.

4) $0,\ 0800505..... = 0,080(05) = \frac{8005-80}{99000} = \frac{7925}{99000} = \frac{317}{3996}$.

5-й примѣръ. $4,05(3) = 4\frac{53-5}{900} = 4^{48}/_{900} = 4^{4}/_{75}$. Если же отъ обращенія 4,05(3) желаемъ получить сразу неправильную дробь, то тогда 4,05(3) будетъ $= \frac{4053-405}{900} = \frac{3648}{900} = {}^{304}/_{75}$.

Точно такъ же найдемъ, что и чисто-періодическая дробь, напр.: 43,(5) при обращеніи въ неправильную простую будетъ $= \frac{435-43}{9} = {}^{392}/_{9}$.

Замѣчаніе. Разсматривая простыя дроби, получаемыя отъ обращенія смѣшанныхъ періодическихъ, мы замѣчаемъ, что смѣшанная періодическая дробь всегда приводится къ такой несократимой дроби, знаменатель которой содержитъ, кромѣ 2 и 5, еще другихъ первоначальныхъ множителей.

Digitized by Google

Какъ можно представить всякое цѣлое число или конечную десятичную дробь въ видѣ періодической? Изъ правилъ обращенія періодическихъ дробей въ простыя слѣдуетъ, что, напр., $4,(9) = 5$; $0,0(9) = 0,1$; $0,00(9) = 0,01$ и т. п.

Отсюда мы заключаемъ, что **всякая разрядная единица можетъ быть замѣнена періодической дробью, имѣющей въ періодѣ цифру 9.** Пользуясь этимъ, мы можемъ всякое число или конечную десятичную дробь обратить въ періодическую. Для этого достаточно только отъ послѣдней цифры даннаго числа отнять единицу и замѣнить ее соотвѣтствующей періодической дробью. Такъ, напр.: $25 = 24,(9)$; $0,3 = 0,2(9)$; $0,07 = 0,06(9)$ и т. п.

§ 31. Какъ выполняются дѣйствія (слож., вычит., умнож., дѣленіе) **въ томъ случаѣ, когда одновременно даны и простыя дроби и десятичныя?** Если въ вычисленіе одновременно входятъ и простыя дроби и десятичныя, то въ этомъ случаѣ обыкновенно или 1) **простыя дроби обращаютъ въ десятичныя** и выполняютъ дѣйствія по правиламъ десятичныхъ дробей, или же 2) **десятичныя дроби обращаютъ въ простыя** и выполняютъ дѣйствія по правиламъ простыхъ дробей.

1-й примѣръ. Дано вычислить: $\frac{(3,25 - {}^3/_4) \cdot 6,25}{(2 - 0,75) : {}^4/_5}$.

Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ всѣ данныя десятичныя дроби—точныя, и простыя также обращаются въ точныя, то поэтому вычисленіе можетъ быть выполнено десятичными дробями. Обративъ простыя дроби въ десятичныя, найдемъ, что

$$\frac{(3,25 - {}^3/_4) \cdot 6,25}{(2 - 0,75) : {}^4/_5} = \frac{(3,25 - 0,75) \cdot 6,25}{(2 - 0,75) : 0,8}.$$

Произведя показанныя дѣйствія:

1) $\begin{array}{r} 3,25 \\ -\ 0,75 \\ \hline 2,5 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 6,25 \\ \times\ 2,5 \\ \hline 15,625 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 2,00 \\ -\ 0,75 \\ \hline 1,25 \end{array}$ 4) $1,25 : 0,8 = 12,5 \mid \underline{8}$ $\quad 1,5625$

5) $15,625 : 1,5625 = 156250 \mid \underline{15625}$ $\quad 10$.

Отв. 10.

Digitized by Google

2-й примѣръ. Дано вычислить: $\frac{5/8 + 0,4}{7/12 - 0,3}$.

Если бы дробь $7/12$ обращалась въ десятичную точную, то данное выраженіе можно было бы вычислить по предыдущему, т.-е. десятичными дробями; но такъ какъ $7/12$ обращается въ періодическую, то поэтому вычисленіе можетъ быть выполнено въ точности только простыми дробями. Обративъ десятичныя дроби въ простыя, найдемъ, что

$$\frac{5/8 + 0,4}{7/12 - 3/10} = \frac{5/8 + 2/5}{7/12 - 3/10} \text{ и т. д.}$$

3-й примѣръ. Дано вычислить: $\frac{5,1\ (6) - 3,\ (7)}{2,8 : 2,\ (7)}$.

Такъ какъ дѣйствія надъ періодическими дробями, какъ надъ десятичными, не выполняются, то поэтому данное выраженіе можетъ вычислено только простыми дробями, то-есть

$$\frac{2,8 : 2,\ (6)}{5,\ 1\ (6) - 3\ (7)} = \frac{2^4/5 : 2^2/3}{5^1/6 - 3^7/9} \text{ и т. д.}$$

---

§ 32. Метрическая система мѣръ.

Во Франціи съ начала прошлаго столѣтія (въ 1801 г.) введена **метрическая система мѣръ**. Метрической она названа потому, что основною единицею всѣхъ мѣръ, кромѣ мѣръ времени, принятъ **метръ**.

Метръ составляетъ одну десятимилліонную долю длины четверти земного меридіана (отъ полюса до экватора), или же $\frac{1}{40000000}$ долю длины всего земного меридіана.

На наши мѣры метръ равенъ приблизительно 1,4 аршина. Метрическая система мѣръ ещё называется **десятичной**, такъ какъ всѣ мѣры, за исключеніемъ мѣръ времени, составлены изъ метра по десятичной системѣ счисленія, т.-е. каждая слѣдующая мѣра въ 10 разъ болѣе предыдущей и наоборотъ.

Digitized by Google

Мѣры длины.

Для составленія названій мѣръ, большихъ метра, принято къ слову метръ прибавлять греческія слова: **дека** (10), **гекто** (100), **кило** (1000), **миріа** (10000). Итакъ:

декаметръ = 10 метрамъ
гектометръ = 100 »
километръ = 1000 »
миріаметръ = 10000 »

Для составленія названій мѣръ, меньшихъ метра, принято къ слову метръ прибавлять латинскія слова: деци ($^1/_{10}$), центи или санти $\left(\frac{1}{100}\right)$, милли $\left(\frac{1}{1000}\right)$. Итакъ:

дециметръ = 0,1 метра.
центиметръ = 0,01 »
миллиметръ = 0,001 »

Мѣры поверхностей.

Для измѣренія небольшихъ площадей употребляются: **квадратный метръ, кв. сантиметръ, кв. миллиметръ** и т. п.

При измѣреніи полей употребляются: **сантиаръ** = квадратному метру = 10,76 кв. футамъ; аръ = кв. декаметру; гектаръ = 100 арамъ.

Мѣры объемовъ.

Для измѣренія объемовъ небольшихъ тѣлъ употребляются: **кубическій сантиметръ, куб. миллиметръ;** при измѣреніи же объемовъ строительныхъ матеріаловъ или дровъ употребляются: **стеръ** = кб. метру; **декастеръ** = 10 стерамъ; **децистеръ** = $^1/_{100}$ стера.

Мѣры жидкостей и сыпучихъ тѣлъ.

Основною единицею служитъ **литръ,** равный кубич. дециметру.

Кромѣ того, употребляются:

декалитръ = 10 литрамъ;
гектолитръ = 100 »

децилитръ = 0,1 литра
сантилитръ = 0,01 »

Digitized by Google

Мѣры вѣса.

Основной единицей вѣса служитъ **граммъ**, равный вѣсу куб. сантиметра чистой воды при температурѣ наибольшей ея плотности (при 4-хъ градусахъ Цельсія). Кромѣ того, употребляются:

декаграммъ = 10 граммамъ;	дециграммъ = 0,1 грам.
гектограммъ = 100 »	сантиграммъ = 0,01 »
килограммъ = 1000 »	миллиграммъ = 0,001 грам.
тонна = 1000 килогр.	

На наши мѣры 1 граммъ = $22^1/_2$ долямъ; 1 килограммъ = $2^1/_2$ фунт.; 1 тонна = 61 пуду (эти равенства приблизительныя).

Мѣры денегъ.

За единицу цѣны принимается **серебряная монета франкъ**, вѣсъ которой = 5 граммамъ, а діаметръ 23 миллиметрамъ. На наши деньги франкъ стоитъ приблизительно $37^1/_2$ коп. Кромѣ того, употребляются бронзовыя монеты въ 5 сантимовъ и въ 10 сантимовъ; первая называется су, и составляетъ $^1/_{20}$ франка, а вторая—2 су и составляетъ $^1/_{10}$ франка.

Преимущества метрической системы передъ русской.

Метрическая система мѣръ, кромѣ своей простоты и легкости запоминанія, превосходитъ нашу русскую, главнымъ образомъ, удобствомъ при вычисленіяхъ. Въ метрической системѣ, какъ десятичной, весьма упрощаются всѣ дѣйствія надъ именованными числами.

Раздробленіе и превращеніе именов. чиселъ, требующія по русской системѣ многократныхъ умноженій и дѣленій, въ метрической системѣ производятся при помощи постановки или перенесенія запятой вправо или влѣво (съ прибавленіемъ иногда одного или нѣсколькихъ нулей).

Digitized by Google

Пусть, напр., требуется раздробить 8 декаметр. 5 метр. 6 дециметр. 4 сантиметра въ сантиметры.

Такъ какъ декаметры составляютъ тысячи сантиметровъ, метры—сотни сантиметровъ и дециметры—десятки сантиметровъ, то, слѣд., раздробленіе въ данномъ случаѣ представляетъ собою не что иное, какъ просто соединеніе въ одно число 8 тыс. 5 сот. 6 дес. 4 един., т.-е. 8 декам. 5 метр. 6 дециметр. 4 сантимет. = 8564 сантиметра. Если же мы желаемъ 8564 сантиметра раздробить въ миллиметры, то для этого достаточно справа приписать нуль, т.-е. 8564 сантим. = 85640 миллим. Точно такъ же легко производится и превращеніе; достаточно для этого поставить или перенести запятую влѣво черезъ одинъ или нѣсколько десятичныхъ знаковъ.

1) Напр.: 4375 миллиметр. = 437,5 сантим. = 43,75 децим. = 4,375 метр. и т. д. = 0,004375 километр.

2) Напр.: 35648 сантиграм. = 356,48 грам. = 35,648 декаграм. = 0,35648 килограм.

Замѣчаніе. Всѣ дѣйствія надъ составными именов. числами, выраженными по метрической системѣ, производятся такъ же, какъ надъ десятичными дробями.

Сравненіе русскихъ мѣръ съ главнѣйшими французскими.

Километръ = 0,9374 версты.
Метръ = 3,2909 фута = 1,40611 арш.
Сантиметръ = 0,2245 вершка.
Гектаръ = 0,9153 десятины.
Аръ = 21,968 кв. сажени.
Кв. метръ = 10,7643 кв. фута.
Стеръ = 35,3166 кб. фута.
Кб. сантиметръ = 61,02 кб. линіи.
Гектолитръ = 3,81131 четверика.
Литръ = 0,081308 ведра.
Килограммъ = 2,4419 фунта.
Граммъ = 0,23443 золотника.

Digitized by Google

Общеупотребительныя иностранныя монеты, цѣнность которыхъ выражена въ рубляхъ.

Германская марка = 0,46.
Голландскій гульденъ = 0,78.
Австро-венгерская крона = 0,39.
Датская (шведская, норвежская) крона = 0,52.
Фунтъ стерлинговъ 9,45.
Долларъ (Сѣверн. Америка) = 1,94.
Японская іена = 9,60.

Digitized by Google

Таблица простыхъ (первоначальныхъ) чиселъ до 5987 [1]).

2	**179**	**419**	**661**	**947**	**1229**	**1523**	**1823**	**2131**
3	181	421	673	953	1231	1531	1831	2137
5	191	431	677	967	1237	1543	1847	2141
7	193	433	683	971	1249	1549	1861	2143
11	197	439	691	977	1259	1553	1867	2153
13	199	443	701	983	1277	1559	1871	2161
17	211	449	709	991	1279	1567	1873	2179
19	223	457	719	997	1283	1571	1877	2203
23	227	461	727	1009	1289	1579	1879	2207
29	229	463	733	1013	1291	1583	1889	2213
31	**233**	**467**	**739**	**1019**	**1297**	**1597**	**1901**	**2221**
37	239	479	743	1021	1301	1601	1907	2237
41	241	487	751	1031	1303	1607	1913	2239
43	251	491	757	1033	1307	1609	1931	2243
47	257	499	761	1039	1319	1613	1933	2251
53	263	503	769	1049	1321	1619	1949	2267
59	269	509	773	1051	1327	1621	1951	2269
61	271	521	787	1061	1361	1627	1973	2273
67	277	523	797	1063	1367	1637	1979	2281
71	281	541	809	1069	1373	1657	1987	2287
73	**283**	**547**	**811**	**1087**	**1381**	**1663**	**1993**	**2293**
79	293	557	821	1091	1399	1667	1997	2297
83	307	563	823	1093	1409	1669	1999	2309
89	311	569	827	1097	1423	1693	2003	2311
97	313	571	829	1103	1427	1697	2011	2333
101	317	577	839	1109	1429	1699	2017	2339
103	331	587	853	1117	1433	1709	2027	2341
107	337	593	857	1123	1439	1721	2029	2347
109	347	599	859	1129	1447	1723	2039	2351
113	349	601	863	1151	1451	1733	2053	2357
127	**353**	**607**	**877**	**1153**	**1453**	**1741**	**2063**	**2371**
131	359	613	881	1163	1459	1747	2069	2377
137	367	617	883	1171	1471	1753	2081	2381
139	373	619	887	1181	1481	1759	2083	2383
149	379	631	907	1187	1483	1777	2087	2389
151	383	641	911	1193	1487	1783	2089	2393
157	389	643	919	1201	1489	1787	2099	2399
163	397	647	929	1213	1493	1789	2111	2411
167	401	653	937	1217	1499	1801	2113	2417
173	409	659	941	1223	1511	1811	2129	2423

[1]) Заимствована изъ соч. *П. Л. Чебышева* „Теорія сравненій".

Digitized by Google

2437	**2833**	**3259**	**3659**	**4073**	**4507**	**4943**	**5393**	**5801**
2441	2837	3271	3671	4079	4513	4951	5399	5807
2447	2843	3299	3673	4091	4517	4957	5407	5813
2459	2851	3301	3677	4093	4519	4967	5413	5821
2477	2857	3307	3691	4099	4523	4969	5417	5827
2473	2861	3313	3697	4111	4547	4973	5419	5839
2477	2879	3319	3701	4127	4549	4987	5431	5843
2503	2887	3323	3709	4129	4561	4993	5437	5849
2521	2897	3329	3719	4133	4567	4999	5441	5851
2531	2903	3331	3727	4139	4583	5003	5443	5857
2539	**2909**	**3343**	**3733**	**4153**	**4591**	**5009**	**5449**	**5861**
2543	2917	3347	3739	4157	4597	5011	5471	5867
2549	2927	3359	3761	4159	4603	5021	5477	5869
2551	2939	3361	3767	4177	4621	5023	5479	5879
2557	2953	3371	3769	4201	4637	5039	5483	5881
2579	2957	3373	3779	4211	4639	5051	5501	5897
2591	2963	3389	3793	4217	4643	5059	5503	5903
2593	2969	3391	3797	4219	4649	5077	5507	5923
2609	2671	3407	3803	4229	4651	5081	5519	5927
2617	2999	3413	3821	4231	4657	5087	5521	5939
2621	**3001**	**3433**	**3823**	**4241**	**4663**	**5099**	**5527**	**5953**
2633	3011	3449	3833	4243	4673	5101	5531	5981
2647	3019	3457	3847	4253	4679	5107	5557	5987
2657	3023	3461	3851	4259	4691	5113	5563	
2659	3037	3463	3853	4261	4703	5119	5569	
2663	3041	3467	3863	4271	4721	5147	5573	
2671	3049	3469	3877	4273	4723	5153	5581	
2677	3061	3491	3881	4283	4729	5167	5591	
2683	3067	3499	3889	4289	4733	4171	5623	
2687	3079	3511	3907	4297	4751	5179	5639	
2689	**3083**	**3517**	**3911**	**4327**	**4759**	**5189**	**5641**	
2693	3089	3527	3917	4337	4783	5197	5647	
2699	3109	3529	3919	4339	4787	5209	5651	
2707	3119	3533	3923	4349	4789	5227	5653	
2711	3121	3539	3929	4357	4793	5231	5657	
2713	3137	3541	3931	4363	4799	5233	5659	
2719	3163	3547	3943	4373	4801	5237	5669	
2729	3167	3557	3947	4391	4813	5261	5683	
2731	3169	3559	3967	4397	4817	5273	5689	
2741	3181	3571	3989	4409	4831	5279	5693	
2749	**3187**	**3581**	**4001**	**4421**	**4861**	**5281**	**5701**	
2753	3191	3583	4003	4423	4871	5297	5711	
2767	3203	3593	4007	4441	4877	5303	5717	
2777	3209	3607	4013	4447	4889	5309	5737	
2789	3217	3613	4019	4451	4903	5323	5741	
2791	3221	3617	4021	4457	4909	5333	5743	
2797	3229	3623	4027	4463	4919	5347	5749	
2801	3251	3631	4049	4481	4931	5351	5779	
2803	3253	3637	4051	4483	4933	5381	5783	
2819	3257	3643	4057	4493	4937	5387	5791	

Digitized by Google

Краткій сборникъ задачъ, распредѣленныхъ по типамъ.

Нахожденіе цѣлаго по данной части.

Рѣшеніе задачъ этого рода сводится къ тому, чтобы узнать, какую часть искомаго составляетъ данная величина; по опредѣленіи же этой части нетрудно найти и самое цѣлое — искомое.

1. Нѣкто, отправившись изъ Москвы въ Орелъ, проѣхалъ въ первый день $^2/_5$, во второй $^1/_2$ всего пути, а въ третій — остальныя 34 версты. Сколько верстъ отъ Москвы до Орла?

Опредѣлимъ, какую часть всего разстоянія составляетъ 34 версты. Въ первые два дня путешественникъ проѣхалъ $^1/_2 + ^2/_5 = ^9/_{10}$ всего разстоянія; слѣдовательно, въ третій день ему осталось проѣхать $^1/_{10}$ разстоянія, что, по условію задачи, и составляетъ 34 версты; все же разстояніе будетъ равно $34 : ^1/_{10} = 340$ верстъ.

2. Два брата получили въ наслѣдство нѣсколько десятинъ земли. Послѣ того, какъ первый продалъ $^1/_3$ полученной доли, а второй $^1/_5$, у каждаго осталось по 120 десятинъ. Сколько десятинъ получено каждымъ?

Опредѣлимъ, какую часть полученной доли составляютъ 120 десятинъ у одного брата и какую часть доли составляютъ 120 десятинъ у другого брата. У перваго брата послѣ продажи осталось $1 - ^1/_3 = ^2/_3$ земли, а у второго $1 - ^1/_5 = ^4/_5$ земли; слѣдовательно, и т. д.

3. Если отъ куска сукна отрѣзать $^7/_{12}$ его длины, то тогда останется въ кускѣ 20 аршинъ. Сколько аршинъ въ кускѣ сукна? Отв. 48 арш.

Digitized by Google

4. Сначала выдано изъ сберегательной кассы $^3/_{11}$ всѣхъ денегъ, потомъ $^1/_4$ остатка, затѣмъ $^2/_7$ новаго остатка и, наконецъ, $^7/_9$ третьяго остатка; послѣ этого осталось денегъ 1320 руб. Сколько всего было денегъ въ кассѣ первоначально? Отв. 15246 р.

5. Если бы торговецъ затратилъ на покупку товара сперва $^7/_{30}$, а потомъ $^1/_6$ бывшихъ у него денегъ, то у него осталось бы $^{17}/_{24}$ всей суммы безъ 15 р. 60 к. Сколько денегъ было у торговца? Отв. 144 р.

6. Пассажирскій поѣздъ желѣзной дороги, двигаясь со скоростью равной $^2/_3$ скорости курьерскаго, отстаетъ отъ послѣдняго въ теченіе 1 часа $23^1/_3$ мин. на $20^5/_6$ верстъ. Сколько верстъ въ часъ проходитъ каждый поѣздъ?

Отв. 45 в ; 30 в.

7. Книга была прочитана мною въ три дня: въ первый день я прочиталъ $^1/_8$ всей книги и еще $^1/_7$ остатка; во второй день $^1/_8$ того, что осталось непрочитаннымъ послѣ перваго дня, и еще $^1/_7$ новаго остатка; въ третій день я докончилъ чтеніе книги. Сколько страницъ въ книгѣ, если извѣстно, что въ третій день мною прочитано было на 126 стр. болѣе, чѣмъ во второй? Отв. 336 стр.

8. Если къ задуманному числу прибавить $^3/_5$ его же да еще 19, то въ результатѣ получится число, большее задуманнаго въ $3^1/_2$ раза. Найти задуманное число. Отв. 10.

9. Если отъ $^7/_{12}$ моихъ денегъ отнять 153 руб., то полученный остатокъ будетъ равенъ $^5/_{24}$ моихъ денегъ. Сколько у меня денегъ? Отв. 408 руб.

10. Чиновникъ уплатилъ сначала $^9/_{20}$ отъ $^5/_9$ своего мѣсячнаго жалованья за наемъ квартиры, потомъ $^3/_5$ отъ $^4/_9$ остального жалованья за столъ; послѣ этого у него осталось 55 руб. Сколько чиновникъ получаетъ въ мѣсяцъ?

Отв. 100 руб.

Подробное рѣшеніе помѣщенныхъ задачъ см. въ книгѣ: *Систематизація ариѳметическихъ типичныхъ задачъ. Сост. Н. И. Соколовъ. Ц. 40 к.* Изданіе книжнаго магазина „В. С. Спиридонова и А. М. Михайлова“, Москва, Тверская, Столешниковъ пер., домъ Ліанозова. (Тел. 120—95).

Digitized by Google

Нахожденіе частей цѣлаго по ихъ суммѣ и соотвѣтственному между ними отношенію.

Если какую-либо изъ искомыхъ частей произвольно обозначимъ 1, и въ доляхъ ея выразимъ остальныя неизвѣстныя части, то сумма всѣхъ этихъ частей, хотя и не составитъ даннаго числа, но будетъ находиться съ нимъ въ извѣстномъ опредѣленномъ отношеніи. Кратное сравненіе данной суммы съ полученной ясно опредѣлитъ, во сколько разъ можно увеличить или уменьшить каждую изъ предполагаемыхъ частей, чтобы получить каждую изъ требуемыхъ.

11. Сумма двухъ чиселъ, изъ которыхъ меньшее составляетъ $^3/_5$ большаго, равна 24. Найти эти числа.

Если большее число обозначимъ 1, то меньшее выразится числомъ $^3/_5$; сумма же этихъ частей равна будетъ $1 + {}^3/_5 = {}^8/_5$. Сравнивъ кратно данную сумму съ полученной $(24 : {}^8/_5 = 15)$, мы опредѣляемъ, что каждую изъ предполагаемыхъ частей, чтобы получить истинное число, нужно увеличить въ 15 разъ. Слѣд., большее число должно быть $1 \cdot 15 = 15$; меньшее $— {}^3/_5 \cdot 15 = 9$.

Въ данной задачѣ и подобныхъ ей можно обозначать какую-либо изъ неизвѣстныхъ частей не только 1, но и какимъ угодно произвольнымъ числомъ. Ходъ рѣшенія одинъ и тотъ же.

12. Въ стадѣ 98 черныхъ и бѣлыхъ овецъ; число бѣлыхъ овецъ составляетъ $^5/_9$ числа черныхъ. Сколько было тѣхъ и другихъ?

Допустимъ, что черныхъ овецъ было 18, тогда бѣлыхъ должно быть $18 \cdot {}^5/_9 = 10$; всего же тѣхъ и другихъ 28 овецъ. Сравнивъ данную сумму съ полученной $(98 : 28 = 3\,{}^1/_2)$, мы узнаемъ, во сколько разъ нужно увеличить каждое изъ произвольныхъ чиселъ, чтобы получить каждое изъ требуемыхъ...

13. Найти два числа, которыхъ сумма и частное равны 10. Отв. $^{10}/_{11}$; $9\,{}^1/_{11}$.

14. Въ сельской школѣ всего 94 учащихся. Сколько въ ней мальчиковъ и дѣвочекъ, если извѣстно, что $^5/_6$ числа дѣвочекъ равны $^2/_7$ числа мальчиковъ? Отв. 70 м., 24 д.

Digitized by Google

15. Лавочникъ купилъ на 151 р. 20 коп. чаю трехъ сортовъ: 18 фун. перваго сорта, 24 фун. второго и 20 фун. третьяго. По какой цѣнѣ платилъ онъ за фунтъ каждаго сорта, если фунтъ третьяго сорта стоитъ столько, сколько $^3/_4$ фун. второго, а фунтъ второго — сколько $^3/_4$ фун. перваго? Отв. 3 р. 20 к.; 2 р. 40 к.; 1 р. 80 к.

16. 95 мужчинъ и 61 женщина вмѣстѣ зарабатываютъ въ день 119 руб. 40 к. Сколько получаетъ въ день за работу мужчина и женщина въ отдѣльности, если извѣстно, что дневной заработокъ женщины составляетъ $^2/_5$ заработка мужчины? Отв. 1 р.; 40 к.

17. Найти дѣлимое, если дѣлитель равенъ $3^1/_5$, а сумма дѣлимаго и частнаго равны 7. Отв. $5^1/_3$; $1^1/_3$.

18. Если неизвѣстное число раздѣлимъ на $5^1/_4$ и частное сложимъ съ дѣлимымъ и дѣлителемъ, то въ результатѣ получимъ 24; найти неизвѣстное. Отв. $15^3/_4$.

19. Купецъ продалъ 35 арш. бархату за 287 руб.; если бы онъ получилъ за эту матерію $^{46}/_{41}$ этого, то имѣлъ бы прибыль отъ продажи, равную $^5/_{18}$ стоимости бархата. Что стоитъ аршинъ бархату самому купцу? Отв. 7 р. 20 к.

20. Торговецъ продалъ одному купцу 22 пуд. 20 фун. сахару и получилъ прибыль равную $^3/_8$ стоимости товара; купецъ же продалъ сахаръ за 192 руб. 50 коп. и получилъ убытокъ, равный $^2/_9$ того, что онъ самъ заплатилъ. По какой цѣнѣ за пудъ покупалъ сахаръ торговецъ. Отв. 8 р.

21. Въ двухъ ящикахъ находилось 753 яблока; когда изъ перваго ящика было продано $^1/_6$, а изъ второго $^4/_{25}$ находившихся въ каждомъ изъ нихъ яблокъ, то тогда въ обоихъ стало поровну. Сколько было яблокъ въ каждомъ ящикѣ? Отв. 378; 375 ябл.

22. Въ два водоема налито 200 ведеръ воды; если изъ перваго водоема перелить во второй 10 ведеръ, то въ первомъ окажется въ $1^1/_2$ раза больше воды, чѣмъ во второмъ. Сколько ведеръ воды въ каждомъ водоемѣ?

Отв. 70 в.; 130 в.

23. Дана дробь $^{37}/_{63}$. Какое число нужно вычесть изъ ея числителя и прибавить къ знаменателю, чтобы послѣ преобразованія получилась дробь $^3/_{17}$. Отв. 22.

Digitized by Google

Опредѣленіе частей цѣлаго по ихъ соотвѣтственному отношенію и разности между ними.

Задачи подобнаго типа рѣшаются предыдущимъ методамъ.

24. Разность двухъ чиселъ 25; частное же ихъ равно $3^1/_2$. Найти эти числа.

Одно изъ искомыхъ можно обозначить какимъ угодно произвольнымъ числомъ. Положимъ, что меньшее число 1, тогда большее $1 . 3^1/_2 = 3^1/_2$; разность же между ними $3^1/_2 - 1 = 2^1/_2$. Сравнивъ данную разность съ полученной произвольной ($25 : 2^1/_2 = 10$), найдемъ, что выбранныя нами числа нужно увеличить для полученія требуемыхъ въ 10 разъ.

25. Всякая окружность больше своего діаметра въ $3^1/_7$ раза. Опредѣлить длину окружности, если разность между окружностью и діаметромъ $= 119^{21}/_{25}$ дюйма?

26. Разность и частное двухъ чиселъ $= 4^3/_5$. Найти эти числа? Отв. $1^5/_{18}$.

27. Паркъ имѣетъ видъ круга; чтобы обойти его по опушкѣ, проходя по 33 саж. въ минуту, надо употребить времени на 40 мин. больше, чѣмъ для того, чтобы пройти черезъ паркъ по его діаметру. Опредѣлить длину окружности парка? Отв. 1936 саж.

28. Найти два числа, которыхъ разность $= 18$, а $^5/_{18}$ одного $= {}^6/_9$ другого? Отв. $12^6/_7$; $30^6/_7$.

29. Разность двухъ чиселъ $= 288$; если изъ одного числа вычесть $^{11}/_{18}$ его, а изъ другого $^{19}/_{54}$, то получимъ равные остатки. Опредѣлить эти числа? Отв. 720; 342.

30. По Московско-Казанской желѣзной дорогѣ отъ Москвы до Коломны на 26 верстъ дальше, чѣмъ отъ Коломны до Рязани. Когда Московскій поѣздъ прошелъ $^{27}/_{52}$, а Рязанскій $^{14}/_{39}$ разстоянія, отдѣлявшаго ихъ отъ Коломны, то имъ осталось до Коломны итти поровну. Сколько верстъ отъ Москвы до Рязани? Отв. 182 вер.

Digitized by Google

31. Найти два числа, разность которыхъ = 15, а сумма превышаетъ большее число на $^1/_6$ этого послѣдняго?

Отв. 18; 3.

32. Разность двухъ чиселъ 18; если къ меньшему придать $^1/_9$ большаго, то получимъ $^{41}/_{45}$ этого послѣдняго. Найти эти числа. Отв. $7^1/_5$.

33. Въ одномъ ящикѣ 48 арбузовъ, а въ другомъ 23 арбуза. По скольку арбузовъ, вынимая поровну, нужно взять изъ обоихъ ящиковъ, чтобы въ первомъ оказалось въ $3^1/_2$ раза больше, чѣмъ во второмъ? Отв. 13 арбуз.

34. Дана дробь $^{29}/_{64}$. По скольку надо отнять отъ обоихъ членовъ ея поровну, чтобы получить дробь $^2/_9$? Отв. 19.

35. Въ двухъ цыбикахъ находится чай, и въ первомъ изъ нихъ въ $4^3/_8$ раза больше, чѣмъ въ другомъ; если же изъ перваго цыбика пересыпать въ другой 27 фун. чаю, то въ обоихъ будетъ поровну. Сколько фунтовъ чаю въ каждомъ цыбикѣ? Отв. 70 фун.; 16 ф.

36. Въ одномъ закромѣ $27^5/_8$ чт. овса, въ другомъ $1^3/_8$ чт. Сколько разъ нужно всыпать въ каждый закромъ по 7 мѣръ, чтобы въ первомъ стало въ $4^1/_2$ раза больше, чѣмъ во второмъ? Отв. 7 разъ.

37. Дана дробь $^{11}/_{41}$. По скольку нужно прибавить поровну къ обоимъ членамъ этой дроби, чтобы она обратилась въ $^3/_8$? Отв. по 7.

Задачи, въ которыхъ опредѣляется:

1) время столкновенія предметовъ, движущихся навстрѣчу одинъ другому, или по одному направленію, 2) время наполненія или опустѣнія водоемовъ и 3) время исполненія различныхъ работъ.

Неизвѣстныя этихъ трехъ родовъ отыскиваютея методомъ приведенія къ единицѣ времени.

38. Два поѣзда, находящіеся одинъ отъ другого на нѣкоторомъ разстояніи, движутся навстрѣчу съ постоянными скоростями; первый можетъ пройти все разстояніе въ 36 минутъ, а второй въ 45 минутъ. Черезъ сколько минутъ они встрѣтятся, если выѣдутъ одновременно?

Digitized by Google

Моментъ встрѣчи поѣздовъ предполагаетъ, что все разстояніе, отдѣляющее пункты отправленій того и другого, пройдено. На основаніи этого рѣшеніе задачи приводится къ отысканію количества времени, употребленнаго движущимися поѣздами на прохожденіе отдѣляющаго ихъ пути.

Опредѣливъ каждую часть разстоянія, пройденнаго тѣмъ и другимъ поѣздомъ въ минуту (первый $^1/_{36}$, а второй $^1/_{45}$ разст.), мы безъ затрудненія находимъ отсюда, что на прохожденіе всего разстоянія до момента встрѣчи употреблено будетъ столько минутъ, сколько въ цѣломъ разстояніи содержится сумма найденныхъ частей $(1 : (^1/_{36} + ^1/_{45})) = 20$ минутъ.

39. Со станціи желѣзной дороги отправленъ пассажирскій поѣздъ, идущій со скоростью $30^1/_4$ верстъ въ часъ; черезъ $3^1/_3$ часа вслѣдъ за нимъ былъ отправленъ курьерскій поѣздъ, проходящій въ часъ по $42^7/_{20}$ версты. Черезъ сколько времени курьерскій поѣздъ догонитъ пассажирскій?

Чтобы нагляднѣе представить себѣ тотъ путь, по которому происходитъ движеніе поѣздовъ, изобразимъ прямую линію и отмѣтимъ на ней тѣ точки, отъ которыхъ движеніе того и другого поѣзда началось одновременно, а также и ту точку, въ которой курьерскій поѣздъ догонитъ пассажирскій. к. $100^5/_6$ в. п ——— к. ц.

Изображенное на линіи движеніе поѣздовъ ясно показываетъ, что курьерскому поѣзду, чтобы догнать пассажирскій, при одновременномъ движеніи обоихъ поѣздовъ вмѣстѣ, нужно пройти пространства больше, чѣмъ пассажирскому, на $100^5/_6$ верстъ, т.-е. на то разстояніе, которое было пройдено пассажирскимъ поѣздомъ въ $3^1/_3$ часа до момента отхода курьерскаго поѣзда. Такъ какъ въ теченіе каждаго часа курьерскій поѣздъ проходитъ на $12^1/_{10}$ верстъ больше, чѣмъ пассажирскій, то для прохожденія всего излишка до точки настиженія, движеніе курьерскаго поѣзда должно продолжаться столько часовъ, сколько въ $100^5/_6$ повторится $12^1/_{10}$, что составляетъ $8^1/_3$, т.-е. черезъ $8^1/_3$ часа курьерскій поѣздъ догонитъ пассажирскій.

40. Въ водоемѣ проведены три трубы: черезъ двѣ первыя вода вливается, а черезъ третью вытекаетъ. Первою трубою водоемъ наполняется въ 12 час., второю въ 6 час., помощью же третьей трубы вся вода изъ наполненнаго

Digitized by Google

водоема вытекаетъ въ 10 часовъ. Во сколько времени наполнится водоемъ при одновременномъ дѣйствіи всѣхъ трехъ трубъ?

Въ данной и подобной ей задачахъ все рѣшеніе сводится къ тому, чтобы опредѣлить разность или остатокъ того количества воды, которой накапливалось въ единицу времени при одновременномъ дѣйствіи вливавшихъ и выливавшихъ трубъ. По найденному остатку легко опредѣляется время, въ которое наполняется весь водоемъ $(1 : (^1/_{12} + ^1/_6) - ^1/_{10})$.

41. Два работника, работая вмѣстѣ, могутъ выполнить нѣкоторую работу въ $6^2/_3$ часа; первый же безъ помощи второго можетъ окончить эту работу въ 12 часовъ. Во сколько времени могъ бы окончить эту же работу второй работникъ?

Рѣшеніе данной задачи приводится къ опредѣленію той части работы, которая можетъ быть выполнена вторымъ работникамъ въ одинъ часъ.

Опредѣливъ разность между частью работы, выполненной въ теченіе часа при совмѣстномъ дѣйствіи обоихъ рабочихъ, и той частью работы, которая можетъ быть выполнена однимъ первымъ работникомъ въ часъ, найдемъ, какая часть можетъ быть выполнена въ часъ вторымъ работникомъ и т. д.

42. Изъ двухъ городовъ, разстояніе между которыми равно $56^{11}/_{20}$ верстамъ, выѣхали одновременно навстрѣчу другъ другу два ямщика; одинъ въ каждыя $^3/_5$ часа проѣзжалъ по 5 вер, 290 саж., а другой въ каждыя $^4/_5$ часа—по 3 версты. Черезъ сколько времени они встрѣтятся?

Отв. $4^1/_3$ час.

43. Бассейнъ наполняется посредствомъ двухъ трубъ; первая труба, дѣйствуя одна, можетъ наполнить его въ $^2/_5$ часа. Въ пустой бассейнъ сначала открыли одну первую трубу, а спустя $8^2/_3$ мин. открыли и вторую, послѣ этого черезъ $7^1/_3$ мин. бассейнъ наполнился. Во сколько времени одна вторая труба можетъ наполнить бассейнъ?

Отв. въ 22 мин.

44. Для приготовленія гвоздей на фабрикѣ поставлены три машины; первая машина въ $^3/_5$ часа приготовляетъ 24 фун., вторая въ $^5/_8$ часа—35 фун. и третья въ $^3/_4$ часа—

Digitized by Google

1 п. 5 фун. Во сколько времени всѣ три машины приготовятъ 78 пудовъ гвоздей? Отв. 20 час.

45. Два работника, изъ которыхъ первый могъ окончить работу въ $5^2/_5$ часа, исполнили въ теченіе $2^1/_2$ час. $^{25}/_{36}$ этой работы, послѣ чего первый отказался отъ дальнѣйшей работы. Во сколько времени второй исполнитъ оставшуюся часть работы? Отв. 3 час. 18 мин.

46. Два колеса, находившіяся на разстояніи 415 саж. 5 фут., начали катиться навстрѣчу другъ другу; одно имѣетъ окружность $= 2^3/_{10}$ арш. и дѣлаетъ 45 оборотовъ въ $1^1/_2$ мин.; другое, котораго діаметръ $= {}^{91}/_{44}$ фут., дѣлаетъ 3 оборота въ 9 секундъ. Черезъ сколько времени они столкнутся? Отв. 10 мин.

47. Въ 6 часовъ минутная стрѣлка составляетъ одну прямую съ часовой. Когда послѣ 6 часовъ минутная стрѣлка покроетъ часовую? Отв. 6 ч. $32^8/_{11}$ мин.

48. Въ бассейнъ проведены 3 трубы; первая и вторая наполняютъ бассейнъ въ 12 час., вторая и третья въ $13^1/_2$ час., первая и третья въ $10^{10}/_{11}$ час. Во сколько времени каждая труба отдѣльно можетъ наполнить бассейнъ? Отв. 20 час.

49. Былъ сдѣланъ запасъ для продовольствія 120 человѣкъ въ теченіе 40 дней. По прошествіи 10 дней продовольствія число людей уменьшилось на 20 человѣкъ. На сколько дней достанетъ остальной части запаса, если ежедневная порція будетъ увеличена на $^1/_5$ противъ прежней? Отв. 30 дней.

50. Изъ двухъ станцій, находящихся одна отъ другой на разстояніи $14^3/_4$ версты, выѣхали одновременно два желѣзнодорожныхъ поѣзда. Поѣздъ, движущійся позади, проходилъ въ часъ по $23^2/_5$ версты и догналъ передній черезъ $2^1/_2$ часа. По скольку верстъ въ часъ проходилъ второй поѣздъ? Отв. $17^1/_2$ в.

51. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую онъ можетъ наполниться въ $1^1/_6$ часа, а черезъ вторую въ $9^1/_2$ мин. н ливается $^{19}/_{240}$ бассейна; первая труба даетъ воды въ каждыя 15 сек. на $9^3/_8$ фун. больше, чѣмъ вторая. Сколько ведеръ воды даетъ каждая труба въ минуту?— Ведро воды вѣситъ 30 фун. Отв. 3 в., $1^3/_4$ в.

Digitized by Google

52. Сцѣпляются два зубчатыхъ колеса, изъ которыхъ на первомъ 24, а на второмъ 36 зубцовъ. Первое колесо дѣлаетъ 25 оборотовъ въ $2^1/_{12}$ секунды Сколько оборотовъ дѣлаетъ второе въ $3^3/_8$ секунды? Отв. 27 обор.

53. Нѣкто взялся исполнить извѣстную работу въ 30 дней и поставилъ на работу 15 человѣкъ; по прошествіи 16 дней онъ увидѣлъ, что сдѣлано только $^3/_{10}$ работы. Сколько надобно прибавить рабочихъ, чтобы работу можно было кончить къ сроку? Отв. 25 раб.

Опредѣленіе неизвѣстныхъ по остаткамъ.

54. Если купецъ будетъ продавать каждый кусокъ сукна по 55 руб., то потерпитъ 74 руб. убытку; если же будетъ продавать по 63 руб. за кусокъ, то получитъ 46 р. прибыли. Сколько самому купцу стоило все сукно?

Сначала нужно опредѣлить количество всего сукна.

Сравнивая данныя условія, найдемъ, что вторая выручка отъ продажи всего сукна превышаетъ первую на 120 руб.; но такъ какъ стоимость каждаго куска въ отдѣльности во второмъ случаѣ превышаетъ первую на 8 руб., то для полученія излишка въ 120 руб. потребуется столько кусковъ сукна, сколько въ 120 повторится 8 и т. д.

55. Нѣсколько человѣкъ желаютъ пожертвовать опредѣленную сумму денегъ для благотворительной цѣли. Если каждый внесетъ $5^1/_5$ руб., то составится сумма, превышающая 2-мя руб. требуемую; если же каждый внесетъ по $3^3/_4$ р., то не достанетъ $12^1/_2$ руб. Сколько было лицъ, пожелавшихъ сдѣлать пожертвованіе? Отв. 10 челов.

56. Подрядчикъ доставилъ въ одно мѣсто сперва осиновыя дрова по $4^4/_5$ р., а потомъ еловыя по 3 руб. 15 коп. за сажень; во второй разъ онъ доставилъ на $27^1/_2$ саж. больше, чѣмъ въ первый, а денегъ получилъ столько же, сколько и въ первый разъ. Сколько онъ получилъ денегъ за всѣ дрова? Отв. 504 р.

Digitized by Google

57. Если поѣздъ будетъ итти по $21^3/_4$ вер. въ часъ, то на всю дорогу затратитъ 7 часами больше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ; если же онъ будетъ проходить по $31^1/_2$ вер., то на всю дорогу затратитъ $1^2/_3$ час. меньше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ. Съ какою скоростью шелъ поѣздъ? Отв. 29 в.

Предположеніе.

Рѣшеніе слѣдующихъ задачъ при допущеніи новаго условія приводится къ опредѣленію неизвѣстныхъ по остаткамъ.

58. Хозяинъ нанялъ работника съ условіемъ платить ему по $1^1/_4$ руб. за каждый рабочій день, а за гулевой день вычитать съ него по $^3/_5$ руб.; черезъ 24 дня хозяинъ разсчиталъ рабочаго и заплатилъ 13 р. 35 коп. Сколько дней работникъ былъ на работѣ? Отв. 15 дн.

59. Для перевозки 120 фарфоровыхъ лампъ наняли извозчика съ тѣмъ, что за доставку въ цѣлости каждой лампы ему будутъ платить по $27^1/_2$ коп.; а за каждую разбитую въ дорогѣ лампу вычитать съ него по $2^2/_5$ р. Сколько лампъ извозчикъ доставилъ въ цѣлости, если по расчету ему пришлось добавить своихъ 4 р. 75 к.? Отв. 106 лампъ.

60. За 25 фун. 3-хъ рублеваго и 5-ти рублеваго чаю заплачено 89 рублей. Сколько было чаю того и другого сорта?

Если бы продавать чай по одинаковой цѣнѣ и притомъ по какой-либо изъ данныхъ, то получится сравнительно съ дѣйствительной суммой или излишекъ или недостатокъ; такимъ образомъ задачу можно привести къ предыдущему методу рѣшеній. Положимъ, что весь чай продавался по цѣнѣ 2 сорта; тогда, увеличивъ цѣну 1 сорта на 3 руб., мы получимъ излишекъ, сравнительно съ данной суммой, въ 36 руб., отсюда нетрудно найти количество чая 1 сорта и т. д.

61. $195^1/_5$ пуд. сахару, купленнаго по $8^4/_5$ р. за пудъ, купецъ долженъ былъ продать частію по $8^2/_5$ руб. и частію по $6^4/_5$ руб. за пудъ, вслѣдствіе чего онъ понесъ 290 р. 56 коп. убытку. Сколько сахару продано по каждой цѣнѣ?

Отв. 62 п. 16 ф.

Digitized by Google

62. Нѣкто купилъ сукна двухъ сортовъ, всего $86^1/_4$ арш., по $2^2/_5$ руб. и по 2 р. 16 к. аршинъ; все это сукно онъ продалъ за 227 р. $35^1/_2$ коп. и получилъ прибыли по пятиалтынному на рубль. Сколько было аршинъ каждаго сорта? Отв. $47^1/_2$; $38^3/_4$.

63. Слитокъ изъ олова и свинца, вѣсомъ въ полпуда, потерялъ при погруженіи въ воду 2 фунта; 10 фун. олова теряютъ въ водѣ $1^3/_8$ фун., а 5 фун. свинца — $^3/_8$ фунта. Сколько олова и свинца въ слиткѣ? Отв. 8 и 32 ф.

64a. У купца былъ цыбикъ чаю, фунтъ котораго ему стоилъ $1^4/_5$ руб. Продавъ $^7/_{12}$ всего чаю, находившагося въ цыбикѣ, по $2^2/_5$ руб. за фунтъ, и весь остальной чай по $1^1/_2$ руб. за фунтъ, купецъ получилъ $15^3/_4$ рубля прибыли отъ продажи всего чаю. Сколько фунтовъ чаю было въ цыбикѣ? Отв. 1 п. 30 ф.

64b. Торговецъ продалъ $^{23}/_{30}$ своего товара въ розницу съ прибылью равной $^3/_{20}$ стоимости, а остальное продалъ оптомъ за 1710 руб.; отъ всей продажи онъ получилъ барышъ, равный $^1/_6$ всей стоимости товара. Что стоилъ товаръ самому торговцу? Отв. 6000 р.

Опредѣленіе неизвѣстныхъ при сравненіи данныхъ величинъ.

65. Одному покупателю разносчикъ продалъ 8 апельсиновъ и 3 лимона за 90 коп., а другому по той же цѣнѣ 5 апельсиновъ и 3 лимона за 63 коп. Почемъ разносчикъ продавалъ каждый лимонъ и апельсинъ?

Изъ сравненія данныхъ условій видно, что разница между ними заключается только въ количествѣ и цѣнѣ одного рода предметовъ; вычитая поэтому однородныя величины изъ однородныхъ, находимъ, что 3 апельсина стоятъ 27 коп. Отсюда опредѣляемъ одно изъ неизв. и т. п.

66. Покупатель взялъ въ лавкѣ кусокъ ситцу въ 48 арш. и 50 арш. сукна и заплатилъ за всю покупку $80^1/_2$ р. Другой покупатель взялъ, по тѣмъ же цѣнамъ, такой же

Digitized by Google

кусокъ ситцу и 35 арш. сукна, заплативъ за все $61\frac{3}{4}$ руб. Что стоитъ аршинъ ситцу и аршинъ сукна?

Отв. $\frac{3}{8}$ руб.; $1\frac{1}{4}$ руб.

67. Два разносчика купили корзину малины и корзину вишенъ. Первый взялъ $\frac{1}{2}$ корзины малины и $\frac{3}{5}$ вишенъ, всего 15 фунтовъ, а второй остальные $12\frac{1}{2}$ фун. Сколько каждый заплатилъ, если фунтъ малины стоилъ 8 коп., а фунтъ вишенъ 16 коп.? Отв. 1 р. 80 к.

Если же въ условія задачи входятъ различныя количества тѣхъ и другихъ однородныхъ предметовъ, то въ этомъ случаѣ обыкновенно сначала уравниваютъ количества какого-нибудь одного рода предметовъ и тогда уже производятъ вычитаніе и т. д.

68. Куплено $13\frac{3}{4}$ арш. сукна и 15 арш. драпу и за все заплечено $66\frac{1}{4}$ рубля. За одинъ аршинъ сукна вмѣстѣ съ однимъ аршиномъ драпу платили $4\frac{3}{4}$ рубля. Сколько стоилъ аршинъ сукна и аршинъ драпу?

Отв. 4 руб.; 75 коп.

69. Двѣ дюжины столовыхъ и 3 дюжины чайныхъ серебряныхъ ложекъ стоятъ $178\frac{1}{5}$ р., а дюжина такихъ же столовыхъ и 4 дюжины чайныхъ ложекъ стоятъ $145\frac{1}{5}$ р. Сколько вѣситъ каждая столовая и чайная ложка, если золотникъ серебра стоитъ 33 коп.? Отв. 14 зол.; $5\frac{2}{3}$ зол.

70. Два брата купили имѣніе въ 19000 руб. и домъ въ 12000 руб. За имѣніе старшій отдалъ $\frac{3}{4}$ своихъ денегъ и младшій $\frac{2}{7}$ своихъ, а за домъ старшій отдалъ $\frac{1}{5}$ своихъ денегъ и младшій $\frac{4}{7}$ своихъ. Сколько денегъ осталось у каждаго брата? Отв. 1000 р....

71. Въ двухъ бассейнахъ налита вода. Если изъ перваго бассейна взять $\frac{1}{4}$ всего количества находящейся тамъ воды, а изъ второго $\frac{1}{10}$, то всего составится $48\frac{3}{4}$ ведеръ; если же изъ перваго взять $\frac{1}{6}$, а изъ второго $\frac{2}{15}$, то составится 45 ведеръ. Сколько воды находится въ томъ и другомъ бассейнѣ? Отв. 120 в.; $187\frac{1}{2}$ в.

72. Хозяйка заготовила ягодъ и сахару для варенья, всего 1 пуд. $9\frac{1}{2}$ фун. Когда изъ $\frac{6}{7}$ всѣхъ ягодъ и $\frac{24}{25}$ сахару она сварила варенье, то ягодъ и сахару вмѣстѣ осталось $4\frac{1}{2}$ фун. Во что обошлось варенье, если ягоды хозяйка покупала по 15 коп., а сахаръ по $12\frac{1}{2}$ коп. за фунтъ? Отв. 6 руб. 15 к.

Digitized by Google

Опредѣлить по количеству различныхъ предметовъ и ихъ общей стоимости стоимость каждаго изъ нихъ,

зная, что цѣнность одного предмета во столько-то разъ дороже или дешевле цѣнности другого, или же зная, что цѣнность нѣкотораго количества однихъ предметовъ равна цѣнности иного количества другихъ предметовъ.

Въ задачахъ подобнаго характера неизвѣстныя опредѣляются съ помощью замѣны одного изъ нихъ другимъ.

73. Куплено 9 фун. чаю и 12 пуд. сахару за 90 руб.; пудъ сахару цѣнился втрое дороже фунта чаю. Что стоитъ фунтъ чаю и пудъ сахару?

Данная задача рѣшается двоякимъ образомъ: или замѣною сахара чаемъ равной стоимости или, наоборотъ, замѣною чая сахаромъ; взявъ въ первомъ случаѣ вмѣсто 9 фун. чаю 3 пуда сахару такой же стоимости, находимъ, что 15 пудовъ сахару стоятъ 90 руб., а 1 пудъ — 6 руб. и т. д.

Такой же ходъ рѣшенія и во второмъ случаѣ.

74. За 18 фун. вишенъ и 8 фун. смородины заплачено 3 руб. 42 коп. Что стоитъ фунтъ вишенъ и фунтъ смородины, если извѣстно, что 3 фун. вишенъ стоятъ столько, сколько 5 фун. смородины?

Если въ данной задачѣ замѣнить вишни смородиной равной стоимости, то вмѣсто 18 фун. вишенъ нужно взять смородины столько разъ по 5 фун., сколько въ 18 содержится 3, т.-е. 6 разъ по 5. Если же замѣнить смородину вишнями, то вмѣсто 8 фун. смородины нужно взять 8 разъ по $^2/_3$ фун. вишенъ (привед. къ единицѣ). Ходъ рѣшенія такой же.

75. 24 работникамъ и 9 работницамъ за дневную работу заплатили $21^3/_5$ руб. Опредѣлить поденную плату каждаго работника и каждой работницы, зная, что 8 работникамъ платили за день столько же, сколько и 15 работницамъ.

Отв. 75 к.; 40 к.

Digitized by Google

76. Разстояніе между двумя городами $243^1/_2$ версты. Путешественникъ, отправившись изъ одного города въ другой въ $8^3/_4$ час. утра, ѣхалъ сначала нѣкоторое время на лошадяхъ, а затѣмъ 9 час. по желѣзной дорогѣ; въ городъ пріѣхаль въ $8^1/_2$ час. вечера. Съ какою скоростью въ часъ ѣхалъ онъ на лошадяхъ и съ какою — по желѣзной дорогѣ, если извѣстно, что первая скорость въ $2^2/_5$ раза меньше второй? Отв. 24 в. 10 в.

77. Куплено $18^1/_2$ аршинъ бархату, $36^3/_4$ арш. синяго сукна и 57 арш. чернаго сукна и за все заплачено 447 руб.; аршинъ бархату вдвое дороже аршина синяго сукна и втрое дороже чернаго. Что стоитъ аршинъ бархату?

Отв. 8 руб.

78. Для отопленія фабрики куплено березовыхъ и осиновыхъ дровъ, всего на $756^1/_4$ р.; сажень березовыхъ дровъ стоитъ $7^3/_4$ руб., а сажень осиновыхъ 4 р. 50 коп. Опредѣлить стоимость березовыхъ дровъ, если ихъ было въ 5 разъ меньше, чѣмъ осиновыхъ.

Вычисленіе поверхностей и площадей.

79. Ученическій залъ имѣетъ въ длину 14 саж., а въ ширину 8 саж. Какъ велика площадь зала?

80. Огородъ занимаетъ площадь въ 2 десятины; длина его 80 саженей. Какой ширины огородъ?

81. Вся граница вокругъ прямоугольнаго лѣсного участка равна 2 верстамъ 60 саж.; ширина же 80 саж. Сколько десятинъ земли занимаетъ этотъ участокъ? (Во всякомъ прямоугольникѣ противоположныя стороны равны).

82. Въ типографіи ежедневно отпечатывается и выходитъ въ свѣтъ 36000 экземпляровъ газеты; листъ каждаго экземпляра имѣетъ въ длину $^7/_8$ арш. и въ ширину 24 дюйма. Сколько десятинъ земли можно было бы покрыть всѣми листами этой газеты, вышедшими въ теченіе 10 дней?

Отв. $12^1/_2$ десятинъ.

83. Тротуаръ имѣетъ въ длину 39 саж. Сколько каменныхъ плитъ нужно для мощенія тротуара, если въ ширину

Digitized by Google

его укладывается по 4 плиты и если каждая плита представляетъ квадратъ, сторона котораго равна $2^3/_5$ фута?

Отв. 420 плитъ.

84. На 12 пальто идетъ 51 арш. драпу въ $1^7/_8$ арш. ширины; какой ширины долженъ быть драпъ, чтобы на 2 такихъ пальто его пошло $7^1/_2$ аршинъ?

Отв. 2 арш. 2 верш.

85. Классная комната имѣетъ 4 равныхъ стѣны и 3 равныхъ окна. Длина каждой стѣны равна 3 саж. $2^1/_3$ арш., высота $1^3/_4$ саж.; ширина каждаго окна равна 2 арш., высота — $^8/_9$ саж. Сколько придется заплатить за окраску стѣнъ классной комнаты, если за окраску каждой квадратной сажени нужно платить по $2^1/_4$ рублей?

Отв. 55 руб. 50 коп.

86. Два помѣщика помѣнялись землею, съ условіемъ цѣнить каждую кв. сажень въ 3 руб. 75 коп. Участокъ перваго имѣлъ въ длину 68 саж. $^2/_5$ арш. и въ ширину 19 саж. $^1/_3$ фута. Какой ширины былъ участокъ второго, если онъ при промѣнѣ получилъ 912 руб. 50 к. деньгами и участокъ его имѣлъ въ длину $86^2/_3$ саж.?

Отв. $12^1/_6$ саж.

87. Чтобы обойти кругомъ по межѣ прямоугольное поле, проходя по 41 саж. въ минуту, потребуется времени 1 часъ 12 мин. Сколько десятинъ занимаетъ поле, если ширина его составляетъ $^{16}/_{25}$ длины? Отв. 216 десят.

Вычисленіе объемовъ.

88. Сколько кирпичей нужно для постройки стѣны длиною въ $15^1/_2$ арш., толщиною въ $1^1/_3$ арш. и вышиною въ $4^1/_2$ арш., если длина каждаго кирпича $^1/_3$ арш., ширина 2 верш. и толщина 1 вершокъ? Отв. 35712 к.

89. Въ классной комнатѣ длиною $4^1/_2$ саж., шириною 3 саж. и вышиною $1^1/_3$ саж. находится 21 ученикъ. Сколько куб. футовъ воздуха приходится на каждаго ученика?

Отв. 294 куб. фута.

90. Прямоугольный сосудъ вмѣщаетъ $6^4/_5$ фун. ртути; опредѣлить высоту этого сосуда, зная, что ширина его

Digitized by Google

$3^1/_3$ дюйма, а длина $2^1/_2$ дюйма. (Одинъ кубич. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фун.; ртуть тяжелѣе воды въ $13^3/_5$ раза).

Отв. $1^1/_2$ куб. дм.

91. Въ стеклянный сосудъ длиною въ $^{15}/_{28}$ арш. и шириною $^8/_{15}$ фут. налита вода такъ, что она не доходитъ на 12 дюймовъ до верхняго края. Когда въ воду опустили мѣдный кусокъ, то вода поднялась и стала на разстояніи отъ верхняго края $6^3/_8$ дюйма. Опредѣлить вѣсъ мѣднаго куска, зная, что куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фунта, а мѣдь тяжелѣе воды въ 9 разъ. Отв. $21^3/_5$ фун.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google